

УДК 543:546.57

Особенности резонансного поглощения электромагнитного излучения в матричных дисперсных системах с металлическими включениями

Л. Г. Гречко, В. М. Огенко, В. В. Мотрич, А. А. Пинчук, Р. В. Биля

Институт химии поверхности НАН Украины
Украина, 252039, Киев, просп. Науки, 31

В приближении эффективной среды рассмотрен механизм поглощения электромагнитного излучения матричной дисперсной системой с металлическими включениями сферической формы в области плазменного резонанса. Показано, что учет парного диполь-дипольного взаимодействия между включениями приводит к существенному изменению частотной зависимости мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}''(\omega)$. В области существования поверхностных плазмонов $\omega \approx \omega_p / \sqrt{3}$ (ω_p — плазменная частота для электронов в материале частицы) появляется полоса непрерывного спектра, которая вносит в $\tilde{\epsilon}''(\omega)$ дополнительное затухание, не зависящее ни от частоты излучения, ни от процессов диссипации в частицах. При величинах степени заполнения $f > f_{кр}$ ($f_{кр}$ — критическое значение параметра f , зависящее от параметров МДС) вблизи границ непрерывного спектра при значениях частот $\omega < \omega_p$ появляются резонансные моды.

Процессы распространения и поглощения электромагнитного излучения (ЭМИ) в двухкомпонентных дисперсных системах изучаются давно (см. [1—3]). Повышенный интерес к технологическим свойствам таких систем привел к возрождению теоретических [4—21] и экспериментальных [22—31] исследований по этой классической проблеме.

В настоящей работе сконцентрировано внимание на изучении некоторых особенностей процессов поглощения ЭМИ в матричных дисперсных системах (МДС), т. е. системах, представляющих собой непрерывную матрицу с внедренными в нее включениями другой фазы, причем объемная доля внедренной фракции значительно меньше объемной доли матрицы. Особый интерес представляют МДС, в которых металлические включения (чаще всего сферической формы) внедрены в диэлектрическую матрицу, ибо на основе та-

ких МДС чаще всего создаются композиционные материалы различного целевого назначения с прогнозируемыми значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. При теоретическом изучении процессов взаимодействия ЭМИ с такими системами широко используется метод эффективной среды. Этот метод в простейшем случае немагнитных сред состоит в том, что МДС с различными диэлектрическими свойствами включений и матрицы заменяется однородной и непрерывной средой с некоторой эффективной диэлектрической проницаемостью ($\tilde{\epsilon}$), зависящей как от диэлектрической проницаемости матрицы (ϵ_0) и включений (ϵ), так и от концентрации включений и их статистического распределения в матрице. Это приближение дает хорошо согласующиеся с экспериментом результаты лишь в том случае, когда длина вол-

ны излучения, взаимодействующего с МДС, значительно превосходит характерные размеры частиц и расстояние между ними (длинноволновое приближение). Обзор ранних исследований по этому методу можно найти в [1—3], а различные его модификации в [4—21].

Для МДС со сферическими включениями радиуса r традиционно используются следующие схемы расчета $\tilde{\epsilon}(\omega)$ [32—36]:

АТА- аппроксимация [1,32]

$$\frac{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0}{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0} = f \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0};$$

СРА- аппроксимация [1,32]

$$f \frac{\epsilon - \tilde{\epsilon}}{\epsilon + 2\tilde{\epsilon}} + (1-f) \frac{\epsilon_0 - \tilde{\epsilon}}{\epsilon_0 + 2\tilde{\epsilon}} = 0;$$

IDA- аппроксимация [1,6]

$$\frac{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0}{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0} \left(\frac{\epsilon_0}{\tilde{\epsilon}} \right)^{1/3} = (1-f);$$

где $f = \left(\frac{4\pi}{3} \right) r^3 n$, n — концентрация включений. АТА больше известна в литературе как максвелл-гарнеттовская аппроксимация (MGT) [33], а СРА часто называют эффективно-усредненной аппроксимацией или приближением среднего поля (ЕМА) [34]. Эти приближения в некотором смысле дополняют друг друга и используются в различных случаях, зависящих от топологии МДС, концентрации включений и т. д. Так, АТА (MGT) в основном применяется для расчета $\tilde{\epsilon}$ МДС с малой концентрацией включений, в то время как СРА (ЕМА) — для статистических смесей, т. е. когда обе компоненты дисперсной системы перемешаны в равных долях. IDA аппроксимация часто используется для расчета электродинамических характеристик фрактальных агрегатов малых частиц.

В процессах поглощения и рассеяния ЭМИ дисперсные системы обнаруживают многочисленные особенности, отсутствующие в случае сплошных непрерывных сред (СНС). Отметим следующие особенности таких процессов в матричных дисперсных системах: аномальное поглощение излучения дальнего ИК диапазона (10—200 мкм) в МДС с металлическими включениями [37—39]; эффект просветления в МДС с двухслойными диэлектрическими

включениями [40]; явление усиленного рамановского рассеяния (SERS) в коллоидных системах с металлическими частицами [41—42]; резонансное поглощение ЭМИ ближнего ИК (1—10 мкм) и видимого диапазонов в МДС с металлическими включениями. Особенно неожиданно последнее явление, поскольку трудно предположить, как в системе, где ЭМИ взаимодействует лишь с электронами проводимости во включениях, возможно резонансное поглощение. Исследованию этого феномена посвящены многочисленные экспериментальные [22—31], и теоретические [4—7; 43—45] публикации, однако полное теоретическое описание этого процесса, согласующееся с экспериментальными данными, отсутствует.

В настоящей работе теоретически изучены особенности этого явления в МДС со сферическими металлическими включениями. При этом использованы результаты работ [43—45], где нами для расчета эффективной диэлектрической проницаемости $\tilde{\epsilon}(\omega)$ подобных систем развит улучшенный вариант приближения MGT, учитывающий прямое мультипольное взаимодействие между частицами системы. Рассмотрение ограничивается случаем длинноволнового приближения, т. е. когда длина волны падающего излучения $\lambda = 2\pi c/\omega$ (ω — частота излучения) значительно превосходит как характерные размеры включений, так и среднее расстояние между ними.

1. Диэлектрическая функция

Рассмотрим систему, состоящую из непрерывной диэлектрической матрицы с внедренными в нее сферическими частицами различных сортов ($a, b, c, \dots$). Диэлектрическая проницаемость матрицы $-\epsilon_0$, частиц $-\epsilon_a, \epsilon_b, \epsilon_c \dots$ соответственно. Число шаров сорта $a - n_a, b - n_b, c - n_c$ и т. д; общее число частиц $n = \sum_a n_a$, концентрация частиц сорта $a - c_a = \frac{n_a}{V}$, общая $-c = \frac{n}{V}$. Вся система находится во внешнем поле, пропорциональном $e^{-i\omega t}$, причем длина волны $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ — значительно больше радиуса шаров и расстояния между ними.

Для расчета электростатического отклика такой системы на внешнее поле поступим следующим образом. Пусть $\vec{p}_i(1, \dots, n)$ — дипольный момент i -й частицы ($1 \leq i \leq n$), который она приобретает при помещении системы во внешнее поле. Вклад в $\vec{p}_i(1, \dots, n)$ вносит как дипольный момент, появляющийся в этой частице при поляризации полем $\vec{E}$ (поле в среде в месте нахождения i -го включения в отсутствие остальных частиц), так и вклад, возникающий от поляризации i -й частицы полем всех остальных $(n-1)$ частиц. Последовательный учет влияния поля других частиц в $\vec{p}_i(1, \dots, n)$ можно осуществить следующим образом:

$$\vec{p}_i(1, 2, \dots, n) = \vec{p}_i + \sum_{j \neq i} \vec{p}_{i,j} + \sum_{j < k, j, k \neq i} \vec{p}_{i,j,k} + \dots \vec{p}_{i,1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n}, \quad (1)$$

где $\vec{p}_{i,j}$ — вклад в $\vec{p}_i(1, \dots, n)$ двухчастичного взаимодействия, $\vec{p}_{i,j,k}$ — трехчастичного и т. д. Чтобы найти эти величины, необходимо последовательно положить в (1) $n = 1, 2, \dots$ и решить получаемые уравнения для $\vec{p}_i, \vec{p}_{i,j}, \dots$. Из них находим:

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \vec{p}_i(i); \quad \vec{p}_{i,j} = \vec{p}(i, j) - \vec{p}_i(i); \\ \vec{p}_{i,j,k} &= \vec{p}(i, j, k) - \vec{p}(i, k) - \vec{p}(i, j) + \vec{p}_i(i) \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (2)$$

В настоящей работе ограничимся в (1) лишь первыми двумя членами, т.е. учтем только парное взаимодействие между частицами. Величина $\vec{p}_i(i, j)$ для двух шаров вычислена в приложении А.

Для определения эффективной диэлектрической проницаемости системы $\tilde{\epsilon}(\omega)$ будем придерживаться схемы, впервые предложенной в [35]. Используя (1), вычислим усредненную по конфигурации системы макроскопическую поляризацию среды $\langle \vec{P}(\vec{r}) \rangle$, которая в силу линейности уравнений Максвелла, связана с $\vec{E}$ соотношением

$$\langle \vec{P}(\vec{r}) \rangle = \hat{K} \vec{E}, \quad (3)$$

где $\hat{K}$ — линейный оператор. Как следует из тех же уравнений Максвелла, среднее лоренцовское поле $\langle \vec{F} \rangle$ в электростатическом пределе связано с поляризацией соотношением [35, 36; 17—21]

$$\langle \vec{F}(\vec{r}) \rangle = \vec{E} + \int G(\vec{r} - \vec{r}') \langle \vec{P}(\vec{r}') \rangle d\vec{r}', \quad (4)$$

где

$$G_{\alpha\beta}(\vec{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \frac{1}{r}, \quad (5)$$

а штрих возле интеграла означает, что он рассматривается в смысле главного значения, т.е. интегрирование производится по всему пространству за исключением сферы радиуса δ ($\delta \rightarrow 0$) вблизи особенности функции

Грина $G(\vec{r} - \vec{r}')$, которая возникает при $\vec{r}' \rightarrow \vec{r}$ [17—21]. Далее, после исключения $\vec{E}$ из (3) и (4), с учетом соотношения [35, 36]

$$\langle \vec{P} \rangle = \frac{3}{4\pi} \frac{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0}{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0} \langle \vec{F} \rangle \quad (6)$$

можно получить требуемое выражение для эффективной диэлектрической проницаемости ($\tilde{\epsilon}$).

Для определения явного вида оператора $\hat{K}$ проведем усреднение (1), используя n -частичную функцию распределения конфигураций системы $\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ [46], где

$$\frac{\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)}{V^N} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \dots d\vec{r}_N \quad (7)$$

— вероятность обнаружить центр первой частицы в объеме $d\vec{r}_1$, центр второй — в $d\vec{r}_2$ и т. д. Фиксируя положение i -й частицы и ограничиваясь в (1) лишь первыми двумя членами, находим

$$\langle \vec{P}_i(1, \dots, n) \rangle = \vec{P}_i +$$

$$+ \frac{1}{V} \sum_{j \neq i} \int_V \vec{p}_{i,j}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) \Phi_{i,j}(\vec{r}_i, \vec{r}_j) d\vec{r}_j, \quad (8)$$

где $\Phi_{i,j}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ — парная функция распределения [46]. Суммируя в (8) по i от 1 до n и деля обе части уравнения на V , после преобразования получим

$$\begin{aligned} \langle \vec{P} \rangle &= c \sum_a c_a \vec{p}_a + \\ &+ c^2 \sum_{a,b} c_a c_b \int d\vec{r}_b p_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \Phi_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Phi_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \left(1 - \frac{\delta_{ab}}{n}\right) \Phi_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ и $\vec{p}_i = \vec{p}_a$; $\vec{p}_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \vec{p}_{i,j}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$, когда индекс i относится к сорту частиц a , а j — к сорту b . Обращая далее выражение (9), с той же точностью можно найти поле $\vec{E}$ [43]

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\langle \vec{P} \rangle}{c \sum_a c_a \alpha_a} - \frac{1}{\left(\sum_a c_a \alpha_a\right)^2} \times \\ &\times \sum_{a,b} c_a c_b \int d\vec{r}_b \Phi_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \hat{\beta}_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \langle \vec{P} \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\beta_{a,b}^{\gamma,\sigma}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \beta_a^{\gamma,\sigma}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) - \alpha_a \delta_{\gamma\sigma}, \quad (11)$$

причем вид тензора $\beta_a^{\gamma,\sigma}(\vec{r}_a, \vec{r}_b)$ находится из решения соответствующей двухчастичной задачи (приложение А)

$$p_a^{\gamma}(a,b) = \beta_a^{\gamma,\sigma}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) E^{\sigma}. \quad (12)$$

Исключив $\vec{E}$ из соотношений (10) и (4), получим

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{\langle \vec{P} \rangle}{\sum_a c_a \alpha_a} -$$

$$- \frac{\sum_{a,b} c_a \alpha_a \int d\vec{r}_a \Phi_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \hat{\beta}_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \langle \vec{P} \rangle}{\left(\sum_a n_a \alpha_a\right)^2}. \quad (13)$$

Тензор $\hat{\beta}_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b)$, как следует из приложения А, может быть представлен в виде

$$\hat{\beta}_{a,b}^{l,m}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \beta_{a,b}^{\parallel} n_l n_m + \beta_{a,b}^{\perp} (\delta_{l,m} - n_l n_m), \quad (14)$$

где $\vec{n} = \vec{R}_{a,b} / R_{a,b}$; $\vec{R}_{a,b} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$; m, l отмечают пространственные координаты x, y, z , а величины $\beta_{a,b}^{\parallel}$ и $\beta_{a,b}^{\perp}$ являются функциями $R_{a,b}$ и равны

$$\begin{aligned} \beta_{a,b}^{\parallel} &= A_{10}^+(R_{ab}) r_a^3 - \alpha_a - 2 \frac{\alpha_a \alpha_b}{R_{a,b}^3}, \\ \beta_{a,b}^{\perp} &= A_{11}^+(R_{ab}) r_a^3 - \alpha_a + \frac{\alpha_a \alpha_b}{R_{a,b}^3}, \end{aligned} \quad (15)$$

где A_{10}^+ и A_{11}^+ находятся из системы уравнений (А.8). С учетом (6) уравнение (13) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} \frac{(\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0)}{(\tilde{\epsilon} - \epsilon_0)} \langle \vec{P} \rangle &= \frac{\langle \vec{P} \rangle}{c \sum_a c_a \alpha_a} - \\ &- \frac{\sum_{a,b} c_a c_b \int d\vec{r}_b \Phi_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \hat{\beta}_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) \langle \vec{P} \rangle}{\left(\sum_a c_a \alpha_a\right)^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

После интегрирования по углу получаем уравнение для нахождения $\tilde{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{3} \frac{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0}{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0} &= \frac{1}{c \sum_a n_a \alpha_a} - \\ &- \frac{\frac{4\pi}{3} \sum_{a,b} c_a c_b \int_0^{\infty} R_{a,b}^2 dR_{a,b} \Phi_{a,b}(R_{ab}) [\beta_{a,b}^{\parallel}(R_{ab}) + 2\beta_{a,b}^{\perp}(R_{ab})]}{\left(\sum_a c_a \alpha_a\right)^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Это основная формула для дальнейших исследований. При получении (17) предположено, что $\Phi'_{a,b}(\vec{r}_a, \vec{r}_b) = \Phi_{a,b}(|\vec{r}_a - \vec{r}_b|)$. Формула (17)

является обобщением известного соотношения Максвелл-Гарнетта [33] на случай дисперсных систем с учетом парного мультипольного взаимодействия между включениями.

В случае частиц одного сорта, имеющих радиус r , из (17) следует выражение для $\tilde{\epsilon}$

$$\frac{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0}{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0} = \frac{1 - \frac{f}{Ar^6} \int_0^\infty R^2 \Phi(R) [\beta^\parallel(R) + 2\beta^\perp(R)] dR}{fA}, \quad (18)$$

где $f = \left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3 n$ — степень заполнения, а

$$\beta^\parallel(R) = [X_{10}(R) - A]r^3; \quad \beta^\perp(R) = [X_{11}(R) - A]r^3.$$

Здесь R — расстояние между двумя произвольно выбранными шарами,

$$A = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{(\epsilon + 2\epsilon_0)}, \text{ а коэффициенты } X_{10}(R)$$

и $X_{11}(R)$ находятся из бесконечной системы зацепляющихся уравнений (см. приложение А, формула (А.11)):

$$\sum_{l'=1}^\infty T_{ll'}^m X_{l'm} = \delta_{ll'}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

$$T_{ll'}^m = \frac{\delta_{ll'}}{A_l} - (-1)^m \frac{(l+l')!}{(l+m)!(l'-m)!} \left(\frac{r}{R}\right)^{l+l'+1};$$

$$A_l = \frac{l(\epsilon - \epsilon_0)}{l\epsilon + (l+1)\epsilon_0}.$$

Учет в (19) лишь членов с $l' = 1$, означает учет лишь парного диполь-дипольного (ДД) взаимодействия между включениями, учет членов с $l' = 2$ — квадрупольного (КР) и т. д. В случае $l' = 1$, из (19) находим

$$X_{10} = \frac{1}{\frac{\epsilon + 2\epsilon_0}{\epsilon - \epsilon_0} - 2\left(\frac{r}{R}\right)^3};$$

$$X_{11} = \frac{1}{\frac{\epsilon + 2\epsilon_0}{\epsilon - \epsilon_0} + 2\left(\frac{r}{R}\right)^3}; \quad (20)$$

Выражения (20), умноженные на r^3 , представляют собой соответственно продольную и поперечную поляризуемость двух шаров во внешнем электрическом поле с учетом дипольного взаимодействия между ними. В простейшем случае, когда $\Phi(R)$ имеет вид [46]

$$\Phi(R) = \begin{cases} 0; & \text{при } R < 2r \\ 1; & \text{при } R \geq 2r \end{cases} \quad (21)$$

и учтено лишь прямое парное дипольное взаимодействие, из соотношений (18) — (21) следует, что $\tilde{\epsilon}$ находится из соотношения

$$\frac{\tilde{\epsilon} + 2\epsilon_0}{\tilde{\epsilon} - \epsilon_0} = \frac{1 - \frac{2}{3} f \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \ln \frac{3\epsilon + 5\epsilon_0}{2\epsilon + 6\epsilon_0}}{f \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0}}. \quad (22)$$

В случае пренебрежения в (22) ДД-взаимодействием (второй член в числителе) получим известное соотношение МГТ-аппроксимации [33]. Если в (22) провести разложение по f с точностью f^2 , то найдем два эквивалентных представления для $\tilde{\epsilon}$:

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_0}{\tilde{\epsilon}} &= 1 - 3fA - 6f^2A^2 \left[-1 + \frac{1}{3} \ln \frac{8+A}{8-2A} \right]; \\ \frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} &= 1 + 3fA + f^2A^2 \left[3 + 2 \ln \frac{8+A}{8-2A} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

где $A = (\epsilon - \epsilon_0)/(\epsilon + 2\epsilon_0)$. Первое соотношение (23) совпадает с результатом работы [5] (формула (18)), а второе — с результатом работы [8] (формулы (5), (7)). Кроме того, соотношение (22) может быть представлено в виде, аналогичном представлению Бергмана для $\tilde{\epsilon}$ [13]:

$$\tilde{t} = \frac{t - t_0}{f} - \frac{2}{9} \ln \frac{3-8t}{2-8t} = \frac{t - t_0}{f} - \frac{2}{9} \int_{\frac{1}{4}t-u}^{\frac{3}{8}} \frac{du}{t-u}, \quad (24)$$

$$\text{где } t_0 = \frac{1-f}{3}; \quad t = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \epsilon}; \quad \tilde{t} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - \tilde{\epsilon}}.$$

Заметим, что появление логарифма в (22) не просто поправка, учитывающая ДД-взаимодействие, а связано с суммированием всего

ряда теории возмущений по этому взаимодействию [5]. В случае близости величин ε и ε_0 можно провести разложение логарифма по малому параметру $A = (\varepsilon - \varepsilon_0) / (\varepsilon + 2\varepsilon_0)$ [8,9].

Эти результаты легко получить из выражения (22), которое может быть обобщено на случай учета высших мультипольных взаимодействий между включениями. Кроме того, разработанная схема допускает обобщение на случай трехчастичных и высших взаимодействий. Правда, при этом надо решать задачи о поведении трех, четырех и более шаров во внешнем электрическом поле, а также знать соответствующие функции распределения.

2. Резонансный характер поглощения электромагнитного излучения в матричных дисперсных системах с металлическими включениями

Экспериментальные исследования оптических свойств композиционных материалов на основе МДС с металлическими включениями привели к установлению ряда общих закономерностей в процессах поглощения ЭМИ в таких системах [22—31]. Если ограничиться простейшим случаем зависимости диэлектрической проницаемости включений от частоты $\varepsilon(\omega)$ [2]

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad (25)$$

и считать диэлектрическую проницаемость матрицы ε_0 постоянной, то эти закономерности можно сформулировать следующим образом:

1) в таких МДС вблизи частоты поверхностного плазмона отдельной частицы

$\omega_s = \omega_p \left[\frac{\varepsilon_\infty}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_\infty} \right]^{1/2}$ (ω_p — плазменная частота для электронов проводимости включений) наблюдается резонансное поглощение падающего излучения на частоте ω_s , причем это имеет место при очень малых значениях параметра $f \ll 1$;

2) ширина этого пика поглощения пропорциональна γ (γ — частота затухания электронов проводимости во включениях), а высота $\sim f/\gamma$;

3) при увеличении степени заполнения f наблюдается уширение этого пика и происходит его сдвиг в длинноволновую область;

4) иногда возникает второй пик, который при увеличении f смещается в коротковолновую область [30].

Простое применение MGT — аппроксимации для объяснения этих закономерностей показывает, что действительно в таких системах наблюдается резонанс на частоте [27,48]

$$\omega_s = \omega_p \sqrt{\frac{\varepsilon_\infty(1-f)}{\varepsilon_0(2+f) + \varepsilon_\infty(1-f)}}, \quad (26)$$

причем мнимая часть эффективной диэлектрической проницаемости системы

$$\text{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega) \approx \frac{f}{\omega_s \gamma}. \text{ Однако предсказанные этой}$$

теорией величины длинноволнового смещения и форма пика при увеличении f плохо согласуются с экспериментом [22—29]. Кроме того, различные модификации этого приближения для объяснения наличия двух пиков поглощения с привлечением соображений о несферичности включений дают расходящиеся с экспериментом результаты. Действительно, в случае эллипсоидальных включений с факторами деполяризации L_1 и L_2 ($2L_1 + L_2 = 1$) [2] из расчетов [47] следует, что появляется два пика резонансного поглощения на частотах

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_p^2}{2} \left[\left(1 - L_1 - \frac{f}{3} \right) \pm \sqrt{\left(1 - L_1 - \frac{f}{3} \right)^2 - 4(1-f)L_1(1-2L_1)} \right],$$

$$(\varepsilon_0 = \varepsilon_\infty = 1), \quad (27)$$

но при увеличении f они оба сдвигаются в длинноволновую область и дублетный характер спектра плохо согласуется с экспериментом [30]. Различные улучшенные варианты приближений с использованием теории многократного рассеяния [6—7], модифицированного варианта среднего поля с применением приближения когерентного потенциала [6—7], ренормализованного приближения MGT с применением диаграммной техники [5] и др. [8—12] привели к улучшению согласия теории и эксперимента, хотя физические причины асимметричности уширения, наличие двух пиков и т. д. не нашли объяснения и в этих теориях. Однако из этих теорий стало ясно, что при увеличении f оказываются существенны-

ми эффекты прямого диполь-дипольного и мультипольного взаимодействий между поляризованными включениями системы, а также статистические свойства распределения частиц в пространстве и по размерам.

В разделе 1 нами получено точное решение задачи о поведении двух сферических частиц в электростатическом поле. Из решения этой задачи следует, что при учете парного дипольного взаимодействия в спектре поверхностных плазмонов появляются две частоты, обусловленные особенностями в продольной и поперечной поляризуемостях двух частиц (формула (20)):

$$\omega_{\parallel}^2 = \omega_s^2 \frac{[1 - 2(r/R)^3]}{1 - 2(r/R)^3 \left(\frac{\varepsilon_{\infty} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{\infty} + 2\varepsilon_0} \right)};$$

$$\omega_{\perp}^2 = \omega_s^2 \frac{[1 + (r/R)^3]}{1 + (r/R)^3 \left(\frac{\varepsilon_{\infty} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{\infty} + 2\varepsilon_0} \right)}; \quad (28)$$

где $\omega_s = \omega_p \left[\frac{\varepsilon_{\infty}}{2\varepsilon_0 + \varepsilon_{\infty}} \right]^{1/2}$ — частота поверхностного плазмона отдельной частицы [23], а R — расстояние между центрами двух частиц. При этом предполагалось, что диэлектрическая проницаемость включений имеет вид (25), а величина затухания $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, где γ_0 — затухание в сплошном образце, а γ_1 — затухание, обусловленное столкновением электронов с поверхностью частицы, по величине порядка $\sim r/v_F$ (v_F — фермиевская скорость электронов) [2]. Из результатов этого же раздела 1 в случае $\varepsilon_{\infty} = \varepsilon_0 = 1$ следует, что

$$\tilde{\varepsilon}(x) = 1 + \frac{3f}{1 - f - 3x^2 - \frac{2}{3}f \ln \frac{3 - 8x^2 - 8ixv}{2 - 8x^2 - 8ixv} - i3xv} \quad (29)$$

где $x = \omega/\omega_p$; $v = \gamma/\omega_p$.

Поскольку формула (29) является основной для дальнейшего анализа, подчеркнем еще раз, что она справедлива при точном учете в

системе идентичных металлических шаров парного ДД-взаимодействия между ними, а также при выполнении соотношений (5), (21) и (25). Из (29), с учетом многозначности логарифмической функции [48], находим

$$\tilde{\varepsilon}' = 1 + \frac{f \cdot L(x, v, f)}{L^2(x, v, f) + N^2(x, v, f)};$$

$$\tilde{\varepsilon}'' = \frac{f \cdot N(x, v, f)}{L^2(x, v, f) + N^2(x, v, f)} \quad (30)$$

$$L(x, v, f) = x_0^2 - x^2 - \frac{1}{9}f \ln \frac{(3 - 8x^2)^2 + 64x^2v^2}{(2 - 8x^2)^2 + 64x^2v^2}; \quad (31)$$

$$N(x, v, f) = \frac{2\pi f}{9} \Theta\left(x^2; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right) + xv + \frac{2}{9}f \cdot \arctg \frac{8xv}{(2 - 8x^2)(3 - 8x^2) + 64x^2v^2}. \quad (32)$$

а $\tilde{\varepsilon}' = \text{Re} \tilde{\varepsilon}(\omega)$, $\tilde{\varepsilon}'' = \text{Im} \tilde{\varepsilon}(\omega)$. Здесь

$x_0^2 = (1 - f)/3$ — частота резонансной моды (26) MGT - аппроксимации, а

$$\Theta\left(x^2; \frac{1}{4}; \frac{3}{8}\right) = \Theta_0\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) - \Theta_0\left(x^2 - \frac{3}{8}\right),$$

$$\Theta_0(x^2 - a) = \begin{cases} 1; & x^2 > a \\ 0; & x^2 < a \end{cases} \quad (33)$$

и $\arctg(y)$ определен в основной области $(-\pi/2; \pi/2)$. Из вида (30) следует очень важный факт: вблизи частоты x_0^2 , соответствующей резонансной частоте MGT - аппроксимации, в интервале частот

$$\frac{1}{4} < x^2 < \frac{3}{8} \quad (34)$$

появляется область непрерывного спектра, которая привносит в функцию $N(x, v, f)$ дополнительное затухание порядка $\frac{2}{9}\pi f$, не зависящее от v и x . Это означает, что даже при $v = 0$ для любой частоты $x = \omega/\omega_p$ из интер-

вала (0.5; 0.61) $\tilde{\epsilon}''(\omega) \neq 0$. В этом смысле такое явление напоминает механизм затухания Ландау для электронов в бесстолкновительной плазме. Подобный механизм уширения был также обнаружен при расчете восприимчивости фрактальных структур с учетом парного флуктуационного дипольного взаимодействия в работе [49] и вскользь упоминается в работе [5]. Учитывая важность этого вопроса, проведем анализ полученных нами выражений (30) — (32), причем внимание сосредоточим на анализе характера зависимости $\tilde{\epsilon}''(x)$ от частоты (ω) и параметров ν и f , поскольку именно мнимая часть $\tilde{\epsilon}(x)$ отвечает за процессы поглощения ЭМИ в системе. Из вида $\tilde{\epsilon}''(x)$ следует, что ее величина сильно возрастает для тех значений x_i ($i=1,2,\dots$), где

$$L(x_i, x, f) = 0. \quad (35)$$

Уравнение (35) определяет (при $\nu \rightarrow 0$) спектр поверхностных плазмонов. В пренебрежении парным диполь-дипольным взаимодействием этот спектр определяется единственной модой x_0 , равной

$$x_0 = \sqrt{(1-f)/3}. \quad (36)$$

При “включении” ДД-взаимодействия спектр поверхностных плазмонов в зависимости от значения параметров ν и f значительно усложняется. При очень малых значениях f из (35) следует, что его решение единственно, причем x_1 лежит в непрерывном спектре и практически совпадает с x_0 . Несмотря на это, если ν и f таковы, что выполняется соотношение

$$x_1 n \gg \frac{2p}{9} f, \quad (37)$$

то зависимость $\tilde{\epsilon}''(x)$ при $x = x_1$ имеет резкий пик с высотой, пропорциональной $f/x_1 n$.

При увеличении f (ν — фиксировано) характер спектра значительно усложняется. Численный анализ зависимостей при изменении параметров f и ν дан на рис. 1, 2. На рис. 1 представлена эволюция зависимости $\tilde{\epsilon}''(x)$

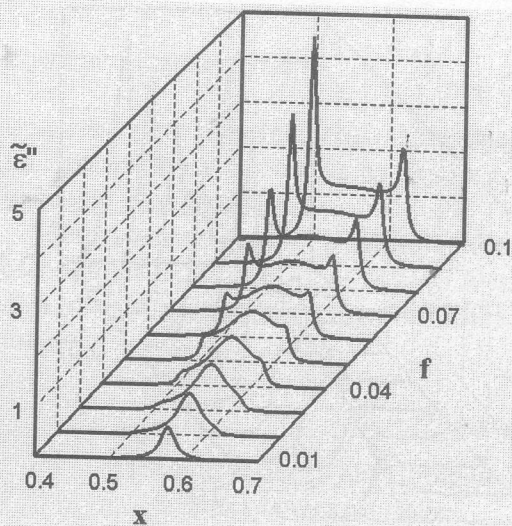


Рис. 1. Зависимость $\tilde{\epsilon}''$ от $x = \omega/\omega_p$ при затухании $\nu = \gamma/\omega_p = 0.01$ для разных степеней заполнения $f = 0.001 \div 0.09$.

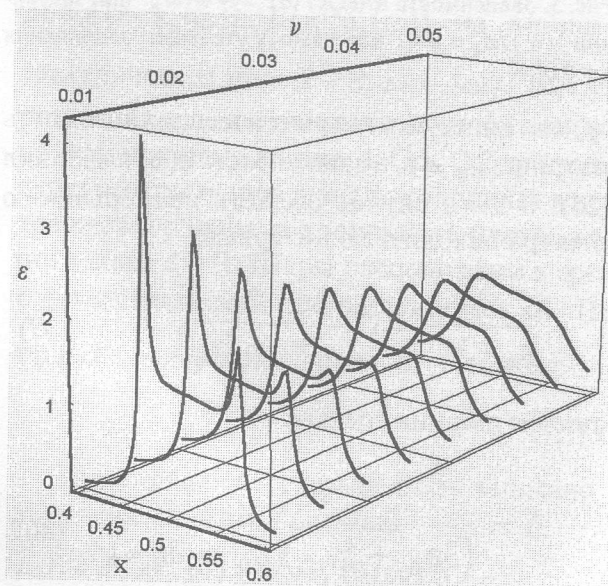


Рис. 2. Зависимость $\tilde{\epsilon}''$ от $x = \omega/\omega_p$ при степени заполнения $f = 0.09$ для разных затуханий $\nu = \gamma/\omega_p = 0.01 \div 0.05$.

при изменении параметра f от 0.001 до 0.3 ($\nu = 0.01$), а на рис. 2 эволюция зависимости $\tilde{\epsilon}''(x)$ при фиксированном $f \approx 0.09$ и изменении ν от 0.01 до 0.1. На рис. 3 представлена частотная зависимость коэффициента поглощения

$$\alpha = \frac{4\pi c}{\omega} \text{Im} \sqrt{\tilde{\epsilon}(\omega)}. \quad (38)$$

при $\nu = 0.01$ и изменении f от 0.01 до 0.1.

Отметим, что возникновение непрерывной области спектра наблюдается также и в общем

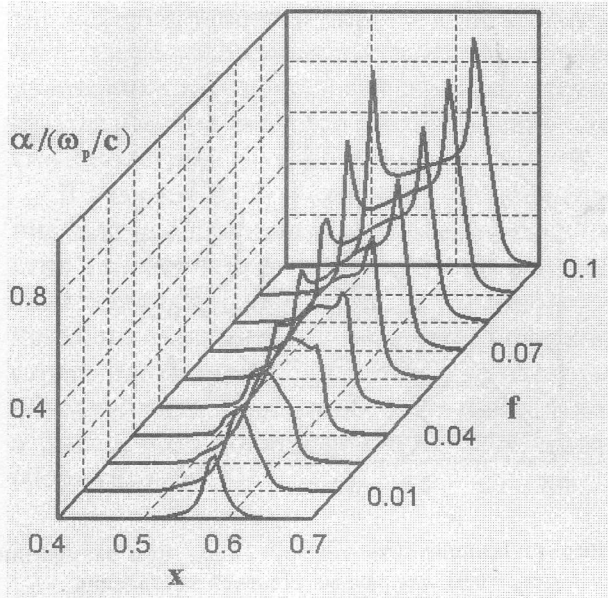


Рис. 3. Зависимость $\alpha/(\omega_p/c)$ от $x = \omega/\omega_p$ при затухании $\nu = \gamma/\omega_p = 0.01$ для разных степеней заполнения $f = 0.01 \div 0.1$.

случае, когда диэлектрическая проницаемость матрицы $\epsilon_0 \neq 1$, а зависимость $\epsilon(\omega)$ имеет вид (25). В этом случае область непрерывного спектра находится в интервале

$$\frac{1}{\epsilon_0 + 3\epsilon_\infty} < x^2 < \frac{3}{3\epsilon_0 + 5\epsilon_\infty}, \quad (39)$$

причем ширина спектра по x_0^2 ,

$$\Delta = \frac{8\epsilon_\infty}{(3\epsilon_0 + 5\epsilon_\infty)(\epsilon_0 + 3\epsilon_\infty)}. \quad (40)$$

Из (40) следует, что значение Δ максимально при $\epsilon_0 = \epsilon_\infty = 1$.

3. Обсуждение результатов

Как следует из приведенных результатов, характер спектров поглощения электромагнитного излучения в системах, представляющих собой диэлектрическую матрицу с внедренными в нее сферическими металлическими включениями, существенно отличается от подобных спектров, полученных в МГТ-приближении [2, 3]. Из соотношений (30) — (32) следует, что в области существования плазменной моды отдельной частицы ($\sim \omega_p / \sqrt{3}$) при учете прямого дипольного взаимодей-

ствия между включениями на частотных зависимостях $\tilde{\epsilon}''(\omega)$ или $\alpha(\omega)$ появляется область

непрерывного спектра $\left(\frac{1}{2} < \omega/\omega_p < \sqrt{3/8}\right)$ с

двумя выделенными пиками на частотах, расположенных вблизи $\omega_{||}$ и $\omega_{\perp}$, определяемых соотношением (28). Как положение этих пиков, так и их высота существенно зависят от параметров f и ν . Такой вид частотных зависимостей $\tilde{\epsilon}''(\omega)$ или $\alpha(\omega)$ может быть объяснен следующим образом (в дальнейшем мы ограничимся случаем $\epsilon_0 = \epsilon_\infty = 1$). При учете прямого дипольного взаимодействия между частицами системы любые две из них, расположенные на расстоянии R , поглощают излучение на частотах $\omega_{||}$ и $\omega_{\perp}$ (28), причем величина этих частот зависит от R . При $R \rightarrow \infty$ ($f \rightarrow 0$) $\omega_{||} = \omega_{\perp} \rightarrow \omega_p / \sqrt{3}$, т. е. $\omega_{||}$ и $\omega_{\perp}$ совпадают с частотой поверхностного плазмона отдельного включения. При сближении включений на

минимальное расстояние ($R = 2r$)

$$\omega_{||}^* = \omega_p / 2 = 0,5\omega_p; \quad \omega_{\perp}^* = \sqrt{3/8}\omega_p = 0,61\omega_p,$$

т. е. частоты $\omega_{||}^*$ и $\omega_{\perp}^*$ представляют собой продольную и поперечную плазменные моды двух соприкасающихся частиц. Эти частоты и определяют границы непрерывного спектра. Для двух частиц, находящихся на произвольном расстоянии R из интервала $(2r, \infty)$, частоты $\omega_{||}$ и $\omega_{\perp}$ лежат в интервале $\left(\frac{1}{2}; \sqrt{3/8}\right)$, причем их положение существенно зависит от степени заполнения f . Так, при $f \rightarrow 0$ эти частоты практически сливаются и расположены вблизи $\omega_p / \sqrt{3}$; при увеличении f они расщепляются и сдвигаются к границам непрерывного спектра.

Следует подчеркнуть, что эти результаты получены нами лишь при учете прямого дипольного взаимодействия между включениями. Учет последующих прямых взаимодействий (квадрольного, октупольного и т.д.) приводит как к расширению границ непрерывного спектра, так и к изменению его формы.

Значение параметра f , при котором становится существенным прямое квадрупольное взаимодействие между частицами, можно оценить исходя из результатов работы [50]. В [50] показано, что уже при расстоянии $R < 3\lambda$ учет такого взаимодействия необходим. Это даст для f значение -0.15 . Наличие непрерывного спектра является не единственным следствием прямого дипольного взаимодействия между частицами. Наведенная в каждой частице поляризуемость (как внешним полем, так и взаимодействием между ними) релаксирует не только за счет прямого поглощения электромагнитного излучения электронами проводимости (затухание γ) во включениях, но и за счет прямого дипольного взаимодействия между ними. Эта релаксация приводит к появлению дополнительного слагаемого (дополнительное затухание) в мнимой части эффективной диэлектрической проницаемости, которое не зависит ни от частоты падающего излучения ω , ни от затухания γ (первый член в (32)). Величина этого затухания зависит только от параметра f и с возрастанием f — увеличивается.

Заканчивая обсуждение, обратим внимание на работу [51], где анализировалась форма полос поглощения излучения ансамблем малых металлических частиц. Для расчета коэффициента поглощения в работе [52] использовалась эффективная диэлектрическая проницаемость, рассчитанная по формуле

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \left[\frac{(1+2f\theta)}{1-f\theta} \right], \quad (41)$$

$$\theta = \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right) \left[1 + G \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \right)^2 \right], \quad (42)$$

а G — феноменологический параметр теории, зависящий от радиуса шаров, фактора заполнения и относительных S -частичных ($S=1, 2, 3$) корреляционных функций. Далее в [51] изучаются изменения формы полосы поглощения при изменении параметра G от 0 до 10. Хотя при этом и наблюдается значительное изменение ширины полосы поглощения при $G > 1$, вся теория остается чисто феноменологической, ибо природа такого уширения остается в [51] невыясненной. Отметим, что формулу, аналогичную (41), можно легко получить из соотношения (23), разложив в нем логарифм

$$\text{в ряд по параметру } A = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{(\epsilon + 2\epsilon_0)}, \text{ но}$$

при этом оказывается, что введенная величина G должна еще зависеть от $\epsilon(\omega)$ и ϵ_0 , т. е. от частоты излучения.

Часть исследований в данной работе была выполнена в рамках проекта 2.4/729 из фонда фундаментальных исследований ГКНТ Украины.

Приложение А

Поляризуемость двух шаров в электрическом поле

Рассчитаем совместный электростатический отклик (поляризуемость) двух шаров $A(r_a, \epsilon_a(\omega))$, $B(r_b, \epsilon_b(\omega))$ на внешнее электрическое поле $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$. Для упрощения расчетов система координат выбрана, как показано на рис. 4. Ось OZ проходит через центры шаров, начало координат в центре первого шара, а координата центра второго шара $z = R$. Шары расположены в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 . Потенциал однородного поля $\vec{E}_0$ в точке $\vec{r}$

$$\psi_0 = -(\vec{E}_0 \vec{r}). \quad (A.1)$$

Выражение (A.1) может быть записано в двух эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 \vec{r} &= E_{\parallel} r P_1^0(\theta) + E_{\perp} r P_1^1(\theta) \cos \varphi \\ E_0 R &= E_{\parallel} r' P_1^0(\theta') + E_{\perp} r' P_1^1(\theta') \cos \varphi', \end{aligned} \quad (A.2)$$

где $E_{\parallel}$ — компонента поля $\vec{E}$, параллельная оси OZ , а $E_{\perp}$ — соответствующая компонента, перпендикулярная оси OZ (поле $\vec{E}$ лежит в плоскости XOZ).

Потенциалы, создаваемые поляризуемыми шарами, являются решениями уравнения Лапласа в сферических координатах. Эти решения можно представить в виде [52]

$$\begin{aligned} \psi_a^+ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{A_{lm}^+ P_l^m(\theta) \cos m\varphi}{r^{l+1}}; \quad \psi_a^- = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{A_{lm}^- r^l P_l^m(\theta) \cos m\varphi}{r^{l+1}}, \\ \psi_b^+ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{B_{lm}^+ P_l^m(\theta') \cos m\varphi}{r^{l+1}}; \quad \psi_b^- = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{B_{lm}^- r'^l P_l^m(\theta') \cos m\varphi}{r^{l+1}}, \end{aligned} \quad (A.3)$$

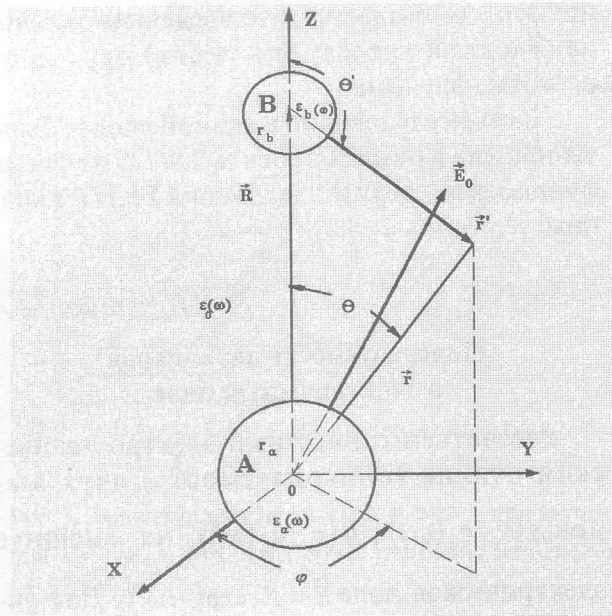


Рис. 4. Система координат, используемая при решении задачи двух шаров во внешнем электрическом поле $\vec{E}_0$.

где $P_l^m(\theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра [52], а ψ_a^+, ψ_a^- (ψ_b^+, ψ_b^-) решения, соответственно, вне и внутри шара A (B). Суммирование по l начинается с $l = 1$, поскольку шары не заряжены. Представляя, согласно принципу суперпозиции, решения в трех областях:

- 1) $|\vec{r}| > r_a; |\vec{r}'| > r_b; \psi = \psi_a^+ + \psi_b^+ + \psi_0;$
- 2) $|\vec{r}| < r_a; |\vec{r}'| > r_b; \psi_a = \psi_a^- + \psi_b^+ + \psi_0;$ (A.4)
- 3) $|\vec{r}| > r_a; |\vec{r}'| < r_b; \psi_b = \psi_b^- + \psi_a^+ + \psi_0$

и учитывая стандартные граничные условия при $r = r_a$

$$\psi_a^+ = \psi_a^-; \quad \epsilon_a \frac{\partial \psi_a^-}{\partial r} - \epsilon_0 \frac{\partial \psi_a^+}{\partial r} = -(\epsilon_a - \epsilon_0) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{\partial \psi_b^+}{\partial r} \right); \quad (A.5)$$

при $r' = r_b$

$$\psi_b^+ = \psi_b^-; \quad \epsilon_b \frac{\partial \psi_b^-}{\partial r'} - \epsilon_0 \frac{\partial \psi_b^+}{\partial r'} = -(\epsilon_b - \epsilon_0) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r'} + \frac{\partial \psi_a^+}{\partial r'} \right), \quad (A.6)$$

а также учитывая формулы преобразования от центра шара A к B и наоборот (см. приложение Б, формулы (Б.12) — (Б.20)), которые для нашего случая имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{P_l^m(\theta)}{r^{l+1}} &= \sum_{l'=|m|}^l (-1)^{l+m} \frac{P_{l'}^m(\theta') (r')^{l'}}{R^{l+l'+1}} \binom{l+l'}{l'+m}, \quad (R > r'); \\ \frac{P_l^m(\theta')}{(r')^{l+1}} &= \sum_{l'=|m|}^l (-1)^{l'+m} \frac{P_l^m(\theta)}{R^{l+l'+1}} r^{l'} \binom{l+l'}{l'+m}, \quad (R > r), \end{aligned} \quad (A.7)$$

где $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, можно найти, что

коэффициенты A_{lm}^+ и B_{lm}^+ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{A_{lm}^+}{\alpha_a} &= E_{\parallel} \delta_{m0} \delta_{l1} + E_{\perp} \delta_{m1} \delta_{l1} - (-1)^{l+m} \sum_{l'=m}^l \binom{l+l'}{l'+m} \frac{B_{l'm}^+}{R^{l+l'+1}}, \\ \frac{B_{lm}^+}{\alpha_b} &= E_{\parallel} \delta_{m0} \delta_{l1} + E_{\perp} \delta_{m1} \delta_{l1} - \sum_{l'=m}^l (-1)^{l'+m} \binom{l+l'}{l'+m} \frac{A_{l'm}^+}{R^{l+l'+1}}. \end{aligned} \quad (A.8)$$

Здесь δ_{mn} — символ Кронекера, а α_{li} ($i = a, b$) — l -мультипольная поляризуемость шара во внешнем электрическом поле

$$\alpha_{li} = \frac{l(\epsilon_i - \epsilon_0)}{l\epsilon_i + (l+1)\epsilon_0} r_i^{2l+1}, \quad (i = a, b). \quad (A.9)$$

Эти формулы совместно с (A.3) дают полное решение данной задачи.

Для дальнейшего анализа рассмотрим более простой случай, когда шары A и B одинаковы, т. е. $r_a = r_b = r$, $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon$. В этом случае система уравнений (A.8) упрощается и после введения переменной

$$A_{lm}^+ = (-1)^{l-1} B_{lm}^+ = (E_{\parallel} \delta_{m0} + E_{\perp} \delta_{m1}) \delta_{l1} r^{l+2} X_{lm} \quad (A.10)$$

сводится к следующей бесконечной системе уравнений:

$$\sum_{l'=1}^{\infty} T_{ll'}^m X_{l'm} = \delta_{l1}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (A.11)$$

где

$$T_{ll'}^m = \frac{r^{2l+1}}{\alpha_l} \delta_{ll'} - (-1)^m \binom{l+l'}{l+m} \left(\frac{r}{R} \right)^{l+l'+1}, \quad (A.12)$$

а α_l дается (A.9). Выражение в первой формуле (A.3) для любого l дает потенциал, обус-

ловленный l -мультипольным моментом. В частности, для дипольного момента ($l = 1$), индуцированного в шаре A , имеем

$$\frac{\vec{p}(1,2) \cdot \vec{r}}{r^3} = \sum_{m=0}^l A_{1m}^+ \frac{1}{r^2} P_1^m(\theta) \cos(m\varphi). \quad (\text{A.13})$$

Учитывая явный вид продольной $(E_{\parallel} r P_1^0(\theta))$ и поперечной $(E_{\perp} r P_1^1(\theta) \cos \varphi)$ частей, входящих в выражение для A_{1m}^+ , из (A.12) находим

$$p_i(1,2) = a^3 [X_{10}(R) n_i n_j + X_{11}(R) (\delta_{ij} - n_i n_j)] E_{0j},$$

$$j = x, y, z, \quad (\text{A.14})$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор, равный $\vec{n} = \vec{R}/R$, а i, j — нумеруют пространственные переменные x, y, z .

Формула (A.13) дает значение дипольного момента любого из шаров A или B во внешнем электрическом поле $\vec{E}_0$ с учетом взаимного влияния друг на друга. Для его нахождения необходимо знание величин $X_{10}(R)$ и $X_{11}(R)$, которые определяются из системы бесконечных зацепляющихся уравнений (A.11). Отметим, что подобным методом может быть решена и N -частичная задача, если вместо (A.7) воспользоваться более общими соотношениями перехода от любого i -центра к любому j -центру (см. приложение Б, формулы (Б.12 — Б.14)).

Приложение Б

Теоремы сложения для телесных гармоник

Регулярные или иррегулярные (в зависимости от их поведения в точке $r = 0$) телесные гармоники

$$f_{lm}^1(r, \theta, \varphi) = r^l Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad f_{lm}^2(r, \theta, \varphi) = r^{-l-1} Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad (\text{Б.1})$$

являются двумя независимыми решениями уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ в сферической системе координат. На практике часто возникают задачи преобразования этих гармоник от

одного центра $(r_1, \theta_1, \varphi_1)$ к другому — $(r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Впервые такое преобразование было получено Гобсоном [53] и затем уточнялось в работах [54—57]. Учитывая большую важность этих соотношений при решении различных многочастичных электростатических задач, получим их несколько нетрадиционным способом. Для начала найдем ряд вспомогательных соотношений.

Из сравнения стандартного разложения [57]

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l R^{-l-1} P_l(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{R}}) \quad (\text{Б.2})$$

и разложения этого выражения в ряд Тейлора

$$\frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{l!} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R)^l \frac{1}{R} \equiv \exp(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R) \frac{1}{R}$$

следует, что

$$(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R)^l \frac{1}{R} = \frac{1}{l!} (-1)^l \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{R}}). \quad (\text{Б.3})$$

Здесь $P_l(\hat{\vec{r}})$ — полином Лежандра 1-го порядка [57], $\hat{\vec{r}}$ — единичный вектор в направлении $\vec{r}$, а $(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{R}})$ — скалярное произведение векторов $\hat{\vec{r}}$ и $\hat{\vec{R}}$. Из соотношений (Б.2—Б.3) следует, что

$$(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R)^{l'} \frac{P_l(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{R}})}{R^{l+1}} = \frac{(l+l')!}{l!} (-1)^{-l'} \frac{r^{l'}}{R^{l+l'+1}} P_{l+l'}(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{R}}). \quad (\text{Б.4})$$

Используя последовательно разложения [57]

$$P_{l+l'}(\hat{\vec{r}} \cdot \hat{\vec{R}}) = \frac{4\pi}{2(l+l'+1)} \sum_{m=-(l+l')}^{l+l'} Y_{l+l',m}^*(\hat{\vec{r}}) Y_{l+l',m}(\hat{\vec{R}}).$$

$$Y_{l+l',m}^*(\hat{\vec{r}}) = \left[\frac{4\pi}{(2l+1)(2l'+1)} \right]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_{m, m'} \frac{\begin{pmatrix} l, & l', & L \\ m, & m', & -M \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l, & l', & L \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}} Y_{l, m}(\hat{\vec{r}}) Y_{l', m'}(\hat{\vec{r}}), \quad (\text{Б.5})$$

из (Б.3) получим

$$\begin{aligned} (\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_R)^l \left[\frac{Y_{l, m}^*(\vec{R})}{R^{l+1}} \right] &= (-1)^{-l} \frac{r^l}{R^{l+1}} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{(2l+1)(2l+1)} \right]^{1/2} \\ &\times \sum_{m, m'} \frac{\begin{pmatrix} l, & l', & L \\ m, & m', & -M \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l, & l', & L \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}} Y_{l, m}(\hat{\vec{r}}) Y_{l', m'}(\vec{R}) \frac{(l+l')!}{l!}, \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

где $\begin{pmatrix} l, & l', & L \\ m, & m', & -M \end{pmatrix}$ — $3j$ -символы Вигнера [57], связанные с коэффициентами Клебша-Гордона соотношением

$$C_{lm, l'm'}^{LM} = (-1)^{l-l'+M} (2L+1)^{1/2} \begin{pmatrix} l, & l', & L \\ m, & m', & M \end{pmatrix}.$$

Так как в нашем случае $L = l + l'$ и $M + m + m' = 0$, то [57]

$$C_{lm, l'm'}^{LM} = C_{l-m, l'-m'}^{LM} =$$

$$= \left[\frac{(2l)!(2l')!}{(2l+2l')!} \cdot \frac{(l+l'+m+m')}{(l-m)!(l+m)!} \cdot \frac{(l+l'-m-m')}{(l'-m')!(l'+m')!} \right]^{1/2}. \quad (\text{Б.7})$$

Используя (Б.2 и Б.3), найдем теперь разложения вблизи точки $\vec{R}$ выражения

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\vec{R} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2)} &= \exp(\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}_R) \exp(-\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_R) \frac{1}{R} = \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{(\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}_R)^{l'}}{l'!} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(\vec{r}_1 \cdot \vec{\nabla}_R)^l}{l!} \frac{1}{R} = \\ &= \sum_{l, l'} \frac{\vec{r}_1^l (\vec{r}_2 \cdot \vec{\nabla}_R)^{l'}}{l!} \frac{P_l(\hat{\vec{r}} \cdot \vec{R})}{R^{l+1}}. \end{aligned}$$

С учетом (Б.5) и (Б.6) отсюда следует

$$\frac{1}{(\vec{R} - \vec{r}_1 + \vec{r}_2)} = \sum_{l, l', m, m'} (-1)^{-l} \frac{(4\pi)^{3/2} (l+l')!}{R^{l+l'+1} l! l'!} \frac{r_1^l r_2^{l'}}{[(2l+1)(2l'+1)(2L+1)]^{1/2}} \times$$

$$\times \frac{\begin{pmatrix} l, & l', & L \\ m, & m', & -M \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l, & l', & L \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}} Y_{lm}(\hat{\vec{r}}_1) Y_{l'm'}(\hat{\vec{r}}_2) Y_{LM}(\hat{\vec{R}}), \quad (\text{Б.8})$$

причем $R > |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, $M = -m_1 - m_2$, $L = l' + l$.

Формула (Б.8) является основной для получения ряда важных соотношений преобразования телесных гармоник. Отметим, что развитый подход может быть с успехом использован для получения разложения выражений

$$\text{общего вида } \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \vec{r}_3 - \dots|}.$$

Из соотношения (Б.8) получим ряд теорем сложения для телесных гармоник [54—56]. Разложение (Б.8) может быть записано в виде [57]

$$\frac{1}{|\vec{R} - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|} = \frac{4\pi}{(2L+1)} \sum_{L, M} \frac{r^L}{R^{L+1}} Y_{LM}(\vec{r}) Y_{LM}(\vec{R}_1).$$

Сравнивая это выражение с (Б.8), находим

$$\begin{aligned} |\vec{r}|^L Y_{LM}(\hat{\vec{r}}) &= \sum_{l, m'} (-1)^{M-l'} \left[\frac{4\pi(2L+1)}{(2l'+1)(2L-2l'+1)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{L! r_1^{L-l'} r_2^{l'}}{l'! (L-l')!} \cdot \frac{\begin{pmatrix} L-l', & l', & L \\ M-m', & m', & M \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} L-l', & l', & L \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}} Y_{L-l', M-m'}(\hat{\vec{r}}_1) Y_{l', m'}(\hat{\vec{r}}_2), \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

где $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Если теперь в (Б.8) положить $\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}_2$ и проделать аналогичные вычисления, то

$$\begin{aligned} \frac{Y_{lm}(\vec{r})}{|\vec{r}|^{l+1}} &= \sum_{l', m'} (-1)^{m-l'} \frac{r_2^{l'}}{R^{l+l'+1}} \left[\frac{4\pi(2l+1)}{(2l'+1)(2l+2l'+1)} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{\begin{pmatrix} l, & l', & l+l' \\ -m, & m', & -m+m' \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} l, & l', & l+l' \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}} Y_{l', m'}(\hat{\vec{r}}_2) Y_{l+l', m-m'}(\vec{R}), \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

причем $|\vec{R}| > |\vec{r}_2|$.

Выражения (Б.9) и (Б.10) позволяют получить ряд соотношений для преобразования

тессариальных гармоник от одного центра к другому [54—56]. Для этого рассмотрим их преобразования от центра $\vec{r}''$ (точка C на рис. 5) до центра $\vec{r}'$ (точка A). Точка O — начало координат, а точка B — произвольная точка пространства с радиус-вектором $\vec{r}$. Кроме того, переобозначим индексы суммирования, чтобы согласовать наши результаты с результатами работ [15,16]. Вводя новые обозначения

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &\Rightarrow (\vec{r}' - \vec{r}'') - (\vec{r} - \vec{r}''); \\ \vec{R} + \vec{r}_2 &\Rightarrow (\vec{r}' - \vec{r}'') + (\vec{r}'' - \vec{r}); \end{aligned} \quad \begin{cases} L \rightarrow l' \\ m \rightarrow m' \\ l' \rightarrow l'' \\ m' \rightarrow m \\ l' \rightarrow l'' \\ m' \rightarrow m'' \\ l \rightarrow l' \\ m \rightarrow m' \end{cases} \quad (\text{Б.11})$$

и используя явный вид $3j$ -функций Вигнера [57], формулы (Б.9—Б.10) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}'|^l Y_{l,m'}(\vec{r} - \vec{r}') &= \sum_{l'',m''} t_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}'' - \vec{r}')^* |\vec{r} - \vec{r}''|^{l''} Y_{l'',m''}(\vec{r} - \vec{r}''); \\ \frac{Y_{l',m'}(\vec{r} - \vec{r}')}{(2l'+1)|\vec{r} - \vec{r}'|^{l'+1}} &= \sum_{l'',m''} A_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}'' - \vec{r}') |\vec{r} - \vec{r}''|^{l''} Y_{l'',m''}(\vec{r} - \vec{r}''), \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

где

$$\begin{aligned} t_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}'' - \vec{r}') &= |\vec{r}'' - \vec{r}'|^{l'-l''} Y_{l'-l'',m'-m''}^* (\vec{r}'' - \vec{r}') \Phi_{l',m'}^{l'',m''}; \\ \Phi_{l',m'}^{l'',m''} &= \left[\frac{4\pi(2l'+1)(l'+m')!(l'-m')!}{(2l'+1)(2l''+1)(l'+m'-l''+m'')!(l'-m'-l''+m'')!(l''+m'')!(l''-m'')!} \right]; \end{aligned}$$

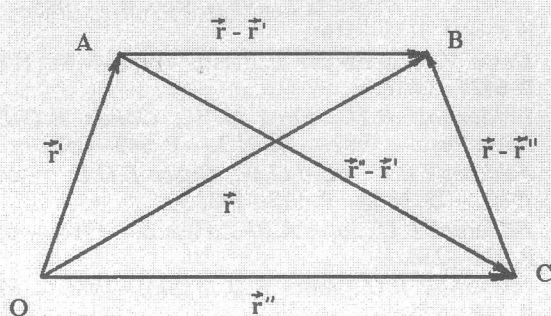


Рис. 5. Общая схема пространственного расположения начала координат (точка O), центра $A(r', \theta', \varphi')$, центра $C(r'', \theta'', \varphi'')$ и точки наблюдения $B(r, \theta, \varphi)$.

$$A_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}' - \vec{r}'') = (-1)^{l'+m'} \frac{1}{|\vec{r}' - \vec{r}''|^{l'+l''+1}} Y_{l'+l'',m'+m''}^* (\vec{r}' - \vec{r}'') \Psi_{l',m'}^{l'',m''};$$

$$\Psi_{l',m'}^{l'',m''} = \left[\frac{4\pi(l'+l''+m'+m'')!(l'+l''+m'-m'')!}{(2l'+1)(2l''+1)(2l'+2l''+1)(l'+m')(l'-m')(l''+m'')(l''-m'')!} \right];$$

следует помнить, что во второй формуле (Б.12) $|\vec{r} - \vec{r}''| < |\vec{r}' - \vec{r}''|$. Чтобы получить соотношения для случая $|\vec{r} - \vec{r}''| > |\vec{r}' - \vec{r}''|$, необходимо во втором соотношении (Б.12) сделать замену

$$\vec{r}' \leftrightarrow \vec{r}''; \quad l' + l'' \rightarrow l''; \quad m' - m'' \rightarrow m''.$$

Для этого случая находим

$$\frac{Y_{l',m'}(\vec{r} - \vec{r}')}{(2l'+1)|\vec{r} - \vec{r}'|^{l'+1}} = \sum_{l'',m''} t_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}' - \vec{r}'') \cdot \frac{Y_{l'',m''}(\vec{r} - \vec{r}'')}{(2l''+1)|\vec{r} - \vec{r}''|^{l''+1}}. \quad (\text{Б.13})$$

Из определения сферических функций [57] следует, что $Y_{l,m}(\hat{r}) \neq 0$ лишь при условии

$l \geq |m|$. Это приводит к тому, что суммирование в первой формуле (Б.12) следует вести по l'' от 0 до l' , по m'' от $(-l'')$ до l'' , во второй — как обычно, а в (Б.13) — по l'' от 0 до l' и по m'' — до m' . Для нахождения обратного преобразования, надо в формулах (Б.12) и (Б.13) сделать замену $\vec{r}' \leftrightarrow \vec{r}''$ и учесть соотношения

$$Y_{l,m}^*(\hat{r}) = (-1)^m Y_{l,-m}(\hat{r}), \quad Y_{l,m}(-\hat{r}) = (-1)^l Y_{l,m}(\hat{r}) \quad (\text{Б.14})$$

Это дает

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^l Y_{l,m'}(\hat{r} - \hat{r}'') = \sum_{l'',m''} t_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}'' - \vec{r}')^* |\vec{r} - \vec{r}''|^{l''} Y_{l'',m''}(\hat{r} - \hat{r}'),$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_{l',m'}(\hat{r} - \hat{r}'')}{(2l'+1)|\vec{r} - \vec{r}''|^{l'+1}} &= \sum_{l'',m''} A_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}'' - \vec{r}') |\vec{r} - \vec{r}''|^{l''} Y_{l'',m''}(\hat{r} - \hat{r}'); \\ &(|\vec{r} - \vec{r}'| < |\vec{r}'' - \vec{r}'|) \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{Y_{l',m'}(\hat{r} - \hat{r}'')}{(2l'+1)|\vec{r} - \vec{r}''|^{l'+1}} &= \sum_{l'',m''} t_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}'' - \vec{r}') \frac{Y_{l'',m''}(\hat{r} - \hat{r}')}{(2l''+1)|\vec{r} - \vec{r}'|^{l''+1}}, \\ &(|\vec{r} - \vec{r}'| > |\vec{r}'' - \vec{r}'|) \end{aligned}$$

где

$$A_{l'',m''}^{l',m'} (\vec{r}'' - \vec{r}') = (-1)^{l'+m''} \frac{Y_{l'+l'',m'+m''}^* (\vec{r}'' - \vec{r}')}{|\vec{r}'' - \vec{r}'|^{l'+l''+1}} \Psi_{l',m'}^{l'',m''};$$

$$t_{l',m'}^{*l',m'}(\vec{r}' - \vec{r}'') = (-1)^{l'-l''} |\vec{r}' - \vec{r}''|^{l'-l''} Y_{l'-l',m'-m'}(\hat{\vec{r}}'' - \hat{\vec{r}}') \Phi_{l',m'}^{l'',m''};$$

$$t_{l',m'}^{*l',m'}(\vec{r}'' - \vec{r}') = (-1)^{l''-l'} |\vec{r}'' - \vec{r}'|^{l''-l'} Y_{l''-l',m''-m'}(\hat{\vec{r}}'' - \hat{\vec{r}}') \Phi_{l',m'}^{l'',m''}.$$

Эти формулы дают преобразования от центра $\vec{r}''$ (точка C) до центра $\vec{r}'$ (точка A). Полученные формулы полностью решают задачу преобразования телесных гармоник (как прямого, так и обратного) при переходе от одного центра к другому и полностью совпадают с результатами работ [15, 16, 54—56].

Рассмотрим теперь частный случай, когда ось OZ проходит через точки A и C , причем $|\vec{r}' - \vec{r}''| = |\vec{r}''| \equiv R$ (начало координат в точке A). Тогда с использованием соотношения [57]

$$y_{l,m}(\theta, \varphi) = \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}};$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\theta) \quad (\text{Б.16})$$

из (Б.11) — (Б.15) с учетом рис.1 следует, что при $R < |\vec{r}|$:

$$\frac{P_{l'}^{m'}(\theta)}{|\vec{r}|^{l'+1}} = \sum_{l''=l'}^{\infty} (-1)^{l''-l'} \frac{P_{l''}^{m'}(\theta'') R^{l''-l'}}{|\vec{r} - \vec{r}''|^{l''+1}} \binom{l''-m'}{l''-l'} \quad (\text{Б.17})$$

при $R < |\vec{r} - \vec{r}''|$;

$$\frac{P_{l'}^{m'}(\theta'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^{l'+1}} = \sum_{l''=l'}^{\infty} (-1)^{l''-l'} \frac{P_{l''}^{m'}(\theta') R^{l''-l'}}{|\vec{r}|^{l''+1}} \binom{l''-m'}{l''-l'} \quad (\text{Б.18})$$

при $R > |\vec{r} - \vec{r}''|$;

$$\frac{P_{l'}^{m'}(\theta')}{|\vec{r}|^{l'+1}} = \sum_{l''=l'}^{\infty} (-1)^{l'+m'} \frac{P_{l''}^{m'}(\theta'') |\vec{r} - \vec{r}''|^{l''}}{R^{l''+l'+1}} \binom{l''+l'}{l''+m'} \quad (\text{Б.19})$$

при $R > |\vec{r}|$

$$\frac{P_{l'}^{m'}(\theta'')}{|\vec{r} - \vec{r}''|^{l'+1}} = \sum_{l''=|m'|}^{\infty} (-1)^{l''+m'} \frac{P_{l''}^{m'}(\theta') |\vec{r}|^{l''}}{R^{l''+l'+1}} \binom{l''+l'}{l''+m'}. \quad (\text{Б.20})$$

Формулы (Б.17) и (Б.19) дают преобразование от точки A $(|\vec{r}|, \theta', 0)$ до точки C $(|\vec{r} - \vec{r}''|, \theta'', 0)$ а формулы (Б.18) и (Б.20) — обратное преобразование. Для регулярных телесных гармоник получим:

$$|\vec{r}|^{l'} P_{l'}^{m'}(\theta') = \sum_{l''=|m'|}^{l'} (-1)^{l'-l''} R^{l'-l''} |\vec{r} - \vec{r}''|^{l''} P_{l''}^{m'}(\theta'') \binom{l'+m'}{l'-l''},$$

$$|\vec{r} - \vec{r}''|^{l'} P_{l'}^{m'}(\theta'') = \sum_{l''=|m'|}^{l'} R^{l'-l''} |\vec{r}|^{l''} P_{l''}^{m'}(\theta') \binom{l'+m'}{l'-l''}. \quad (\text{Б.21})$$

В формулах (Б.17) — (Б.21)

$$\binom{m}{l;n} = \frac{m!}{l!(m-l)!}. \quad (\text{Б.22})$$

Эти соотношения совпадают с результатами работы [56], полученными другим способом. Отметим, что в [53] и в [20] эти формулы приведены с ошибкой.

Литература

1. Landauer R. Proc. First Conf. on the Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media.— Ohio.— 1977, N 40.— P. 2—56.
2. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами.— М.: Мир, 1986.— С. 107—198.
3. Гречко Л.Г., Мотрич В.В., Огенько В.М. // Химия, физика и технология поверхности.— 1993.— Вып.1. С. 17—36.
4. Liebsch A., Persson B.N.J. // J. Phys. C.— 1983.— 16, N 4.— P. 3375—3389.
5. Barrera R.G., Monsivais G., Mochan W.L., Anda E. // Ibid. 1989.— 39, N 9.— P. 1989—1993.
6. Davis V.A., Schwartz L. // Phys. Rev. B.— 1985.— 31, N 8.— P. 5155—5165.
7. Davis V.A., Schwartz L. // Ibid.— 1986.— 31, N 8.— P. 6627—6632.
8. Felderhoff B.U., Ford G.W., Cohen E.G.D. // J.Stat.Phys.— 1982.— 28, N 3.— P. 649—658.
9. Felderhoff B.U., Ford G.W., Cohen E.G.D. // Ibid.— 1982.— 28, N 3.— P. 135—143.
10. Felderhoff B.U., Jones R.B. // Z.Phys.B.— 1986.— 62.— P. 231—238.
11. Felderhoff B.U., Jones R.B. // Ibid.— 1986.— 62.— P. 215—223.
12. Tsang L., Kong J.A. // Appl.Phys.— 1980.— 51, N 5.— P. 3465—3474.
13. Bergman P.J. // Phys.Rev.— 1978.— 43, N 7.— P. 377—389.

14. *Felderhoff B.U.* // Physica A.— 1994.— **207**.— P. 13—27.
15. *Fu L., Resca L.* // Phys.Rev.B.— 1993.— **47**, N 8.— P. 1694—1698.
16. *Fu L., Resca L.* // Ibid.—1984.— **49**, N 8.— P. 6625—6634.
17. *Финкельберг В.М.* // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1964.— **46**.— С. 725—732.
18. *Рыжков Ю.А., Тамойкин В.В., Татарский В.И.* // Там же.— 1965.— **48**.— С. 656—662.
19. *Рыжков Ю.А.* // Изв. вузов. Радиофизика.— 1966.— **9**.— С. 39—47.
20. *Финкельберг В.М.* // Журн. техн. физики.— 1971.— **41**.— С. 1073—1084.
21. *Финкельберг В.М.* // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1967.— **53**.— С. 401—412.
22. *Doremus R.H.* // J.Chem.Phys.— 1965.— **42**.— P. 414—423.
23. *Cohen R.W., Cody G.D., Coutts M.D., Abeles B.* // Phys.Rev.B.— 1973.— **8**, N 2.— P. 3689—3695.
24. *Gensel L., Martin T.P.* // Sur.Sci.— 1973.— **34**.— P. 33—37.
25. *Welker T., Martin T.P.* // J.Chem.Phys.— 1979.— **70**.— P. 5683—5692.
26. *Kreibig U., Althoff A., Pressmenn H.* // Surf. Sci.— 1981.— **106**.— P. 308—314.
27. *Grangvist C.G.* // J.Phys.— 1981.— **42**.— P. 247—256.
28. *Lee S., Noh T.N., Gaines J.R., Ko Y.H., Kreidler E.R.* // Phys.Rev.B.— 1988.— **37**, N 7.— P. 2018—2024.
29. *Evans D.* // Ibid.— 1985.— **32**, N 7.— P. 4169—4177.
30. *Дулин М.Н., Емельянов А.А., Рубцов А.А.* // Опт. и спектр.— 1988.— **64**.— С. 615—624.
31. *Шкляровский И.Н., Емельянов А.А., Рубцов А.А.* // Там же.— 1988.— **64**.— С. 584—593.
32. *Gubernatis J.E.* // Proc. First Conf. on the Electrical Transport and Optical Properties of Inhomogeneous Media. Ohio.— 1977, N. **40**.— P. 84—86.
33. *Maxwell-Garnett J.C.* Phil. Trans.Roy. Soc.— L: 1904.— **203**.— P. 385—397.
34. *Bruggeman D.A.G.* // Ann.Phys.— 1935.— **24**.— P. 636—645.
35. *Brown W.F.* // J.Chem.Phys.— 1955.— **23**.— P. 1514—1523.
36. *Bottcher C.J.F., Bordewijk P.* Theory of Electric Polarization. N.Y.: Elsevier.— 1978.— **2**.— P. 476—488.
37. *Ruppin R.* // Phys. Rev. B.— 1979.— **19**.— P. 1318—1331.
38. *Sen P.N., Tanner D.B.* // Phys. Rev. B -1982.— **26**, N 7.—P. 3582—3587.
39. *Kim Y.H., Tanner D.B.* // Ibid.— 1989.— **39**, N 6.— P. 3585—3589.
40. *Пришивалко А.П., Бабенко В.А., Кузьмин В.Н.* Рассеяние и поглощение света неоднородными и анизотропными сферическими частицами.— Минск: Наука и техника.—1980.— С.182—210.
41. *Moskovits M.* // Rev. Mod. Phys.— 1985.— **57**.— P. 785—792.
42. *Р.Ченч.* Гигантское комбинационное рассеяние.— М.: Мир.— 1984.— С. 406—430.
43. *Grechko L.G., Blanck A.Ya., Pinchuk A.O.* // Radiophys. and Radioastronomy.— 1997.— **1**, N 2.— P. 12—44.
44. *Grechko L.G., Panchenko O.A., Pinchuk A.O.* // Ibid.— 1997.— **1**, N 2.— P. 45—57.
45. *Grechko L.G., Levandovskii V.G., Pinchuk A.O.* // Proc. SPIE.—1997.— **3055**.— P. 111—118.
46. *Белеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика.— М.: Мир, 1978, Т. 1.— С. 45—58.
47. *Grechko L.G., Levandovskii V.G., Reshetnyak V.Yu.* // Func. Mat.— 1995.— **2**.— P. 194—201.
48. *Сидоров Ю.Ф., Федорюк М.В.* // Журн. эксперим. и теорет. физики.— 1982.— **71**.— С. 488—495.
49. *Шалаев В.М., Штокман М.И.* // Там же.— 1987.— **92**.— С. 50—58.
50. *Claro F.* // Phys.Rev. B.— 1984.— **30**, N6.— P. 4989—4996.
51. *Мороз О.В.* // Опт. и спектр.— 1991.— **70**.— С. 317—326.
52. *Morse P.M., Feshbach H.* Methods of theoretical physics.— N.Y.: Mc Graw — Hill.— 1953. —P. 83—103.
53. *Hobson E.W.*, Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics.— Cambridge: Cambr. Univ. Press.— 1931, P. 139—147.
54. *Danos M., Maximon L.C.* // J. Math. Phys.— 1965.— **6**.— P. 766—779.
55. *Crusan O.R.* //Quart. Appl. Math.— 1962.— **20**.— P. 33—46.
56. *Nozawa R.* // J.Math.Phys.— 1966.— **7**.— P. 1841—1853.
57. *Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента.— Л.: Наука.— 1975.— С. 440—458.

Получено 18.02.97

Особливості резонансного поглинання електромагнітного випромінювання в матричних дисперсних системах з металевими включеннями

Л. Г. Гречко, В. М. Огенко, В. В. Мотрич, А. О. Пінчук, Р. В. Біла

В наближенні ефективного середовища розглянуто механізм поглинання електромагнітного випромінювання матричною дисперсною системою з металевими включеннями сферичної форми в області плазмового резонансу. Показано, що врахування парної диполь-дипольної взаємодії між включеннями призводить до суттєвої зміни частотної залежності уявної частини ефективної діелектричної проникливості $\tilde{\epsilon}''(\omega)$. В області існування поверхневих плазмонів $\omega \approx \omega_p / \sqrt{3}$ (ω_p — плазмова частота для електронів в матеріалі частинки) з'являється полоса неперервного спектра, яка вносить в $\tilde{\epsilon}''(\omega)$ додаткове затухання, що не залежить ні від частоти випромінювання, ні від процесів дисипації в частинках. При величинах ступеню заповнення $f > f_{cr}$ (f_{cr} — критичне значення параметра f , що не залежить від параметрів МДС) поблизу границь неперервного спектра при значеннях частот $\omega < \omega_p$ з'являються резонансні моди.

The particularities of resonance absorption of electromagnetic radiation in the matrix dispersed systems with metallic inclusions

L. G. Grechko, V. M. Ogenko, V. V. Motrich, A. A. Pinchuk, R. V. Bila

In the effective medium approximation the absorption mechanism of electromagnetic waves by matrix disperse system with metallic inclusions of spherical form in the region of plasmon resonance is considered. It is shown that accounting of pair dipole — dipole interaction between inclusions leads to the material changing of frequency dependency of imaginary part of effective dielectric permeability $\tilde{\epsilon}''(\omega)$. In the region of existing of surface plasmons $\omega \approx \omega_p / \sqrt{3}$ (ω_p — the plasma frequency for electrons in the particle material) the continuous strip of spectra is appears which brings the additional damping in $\tilde{\epsilon}''(\omega)$. This damping is not depends neither form the radiation frequency nor from the processes of dissipation in the inclusions. The resonance modes at value of filling factor $f > f_c$ (f_c — the critical value of parameter f depending from the parameters of MDS) near the boundaries of continuous spectra are appear.