УДК 533.723:577.352.4(086.48) doi: 10.15407/Surface.2019.11.382

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННАЯ СИММЕТРИЯ БРОУНОВСКИХ МОТОРОВ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДИХОТОМНЫМ ПРОЦЕССОМ

Т. Е. Корочкова,[1] В. М. Розенбаум,[1] В.А. Машира,[2] Е.В. Шакель,[3,4] И. В. Шапочкина,[3] М. И. Иким,[5] Г. Н. Герасимов,[5] В. Ф. Громов, [5] А. С. Бугаев[5]

[1] *Институт химии поверхности им. А. А. Чуйко Национальной академии наук Украины, ул. Генерала Наумова, 17, Киев 03164, Украина,*
e-mail: taiscrust@mail.ru

[2] *Институт металлофизики им. Г. В. Курдюмова Национальной академии наук Украины, ул. Вернадского, 36, г. Киев, Украина, 03164*

[3] *Белорусский государственный университет, пр-т Независимости, 4, Минск 220030, Беларусь*

[4] *Республиканский институт высшей школы, ул.Московская, 15, Минск 220007, Беларусь*

[5] *ФИЦ Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова РАН, ул. Косыгина, 4, Москва 119991, Россия*

Изучение симметрии различных систем позволяет формулировать широкие выводы относительно их свойств без детальной информации о конкретной системе. Модели броуновских моторов (рэтчетов) устанавливают связь между пространственно-временной зависимостью потенциальной энергии броуновских частиц и возникающим рэтчет-эффектом. В данной статье мы используем теорию симметрии рэтчет-систем для исследования механизмов влияния пространственной и/или временной асимметрии наносистемы на среднюю скорость броуновских моторов двух основных типов − с флуктуирующей периодической потенциальной энергией и флуктуирующей силой (так называемых пульсирующих и наклонных рэтчетов, pulsating and forced ratchets).

Рассматривается сверхзатухающее движение броуновской частицы в несмещенном силовом поле, которое описывается периодической ступенчатой функцией координаты, претерпевающем дихотомные изменения со временем. Использование преобразований и свойств симметрии броуновских моторов позволило получить компактные аналитические представления средней скорости пульсирующих и наклонных рэтчетов как функции параметров пространственной и временной асимметрии силовых полей. Выявлено принципиальное различие зависимостей средней скорости броуновских моторов этих двух типов от данных параметров асимметрии. Для пульсирующих броуновских моторов направленное движение наночастиц отсутствует в пространственно-симметричной системе независимо от наличия временной асимметрии; направленное движение в таких системах возможно при наличии пространственной асимметрии, а получение точек остановки мотора при этом достигается путем подстройки параметра временной асимметрии управляющего процесса. Для наклонных броуновских моторов рэтчет-эффект в пространственно симметричных системах может возникать исключительно за счет временной асимметрии. По этой причине точки остановки как результат конкуренции пространственной и временной асимметрии легче реализуются именно для моторов с флуктуирующей силой (наклонных).

Представленные в статье результаты получены на основе анализа только общих свойств симметрии, без привлечения скрытых симметрий рэтчет-систем, поэтому будут справедливы и для инерционной динамики.

Ключевые слова: *диффузионный транспорт, броуновские моторы, рэтчет эффект, симметрия рэтчет-систем, дихотомный процесс, телеграфный шум.*

Введение

Хорошо известно, что изучение симметрии различных систем приводит к достаточно широким выводам, которые можно получать, не вникая в детальную информацию о строении и взаимодействии отдельных элементов этой системы [1, 2]. В этом состоит привлекательность симметрийных подходов, наиболее строгое и, формализированное изложение которых составляет содержание так называемой теории групп [3]. В отдельных дисциплинах свойствам симметрии посвящено много монографий, среди которых можно выделить следующие: [4] − в области физики, [5] − в области химии, [6] − в области биологии. Теоретической основой изучения активного транспорта в биологических системах или управляемого транспорта на наноуровне стала хорошо развитая в настоящее время теория броуновских моторов (рэтчетов), выясняющая как пространственно-временная зависимость потенциальной энергии броуновских частиц может быть связана с рэтчет-эффектом − способностью к возникновению их направленного движения в отсутствие средних сил или градиентов концентраций [7-9]. Ясно, что зависимость потенциальной энергии от координат и времени отражает симметрию строения системы и динамики происходящих в ней процессов, совокупность которых и обуславливает наличие рэтчет-эффекта.

Простейшее описание рэтчет-эффекта проводится путем рассмотрения одномерного движения броуновской частицы во внешнем силовом поле, характеризуемом потенциальной энергией $U(x,t)$, зависящей от координаты x и времени t. В настоящее время уже сформировались представления о том, как пространственно-временная симметрия функции двух переменных $U(x,t)$ влияет на феномен возникновения направленного движения (см. работы [10 - 12] и ссылки в них). Тем не менее, представляет интерес характеризовать симметрию этой функции некоторыми параметрами, нулевые значения которых отражали бы наличие определенной симметрии, а ненулевые − ее отсутствие (причем степень асимметрии увеличивалась бы по мере отличия значений от нуля). Такие параметры активно используются в теории фазовых переходов и называются параметрами порядка, равными нулю и отличными от нуля в неупорядоченной и упорядоченной фазах соответственно (примером может служить намагниченность, равная нулю в парамагнитной фазе и отличная от нуля в ферромагнитной) [13].

Параметр какой-либо асимметрии является ее количественной мерой, а потому может быть определен только для конкретных типов асимметрии. Простейший тип временной асимметрии, допускающий количественное определение путем введения соответствующего параметра асимметрии, характерен для дихотомного процесса (телеграфного шума) с различными или одинаковыми средними временами жизни состояний. Для такого процесса мерой асимметрии может служить разность времен жизни. Количественно охарактеризовать пространственную асимметрию проще всего для пилообразного потенциала, поскольку параметр пространственной асимметрии такого потенциала может определяться разностью ширин его зубцов. Аналогия введенных таким образом параметров вполне очевидна, поскольку силовая характеристика пилообразного потенциала (его производная, взятая с противоположным знаком) представляет собой ступенчатую функцию, симметрия которой определяется соотношением между ширинами ее ступенек (также, как и для дихотомного процесса).

Впервые параметры временной и пространственной асимметрии для пилообразного потенциала, флуктуирующего посредством дихотомного процесса, были введены в работе [14]. В рамках высокотемпературного (низкоэнергетического) приближения в этой работе была проанализирована зависимость направления движения броуновского мотора от значений этих параметров. Оказалось, что конкуренция пространственной и временной асимметрии может приводить к обращению направления движения мотора. Количественные результаты, подтверждающие этот вывод, были получены в [15]. В настоящей работе, используя теорию симметрии рэтчетов [10 - 12], мы выходим за рамки приближений работ [14, 15] и получаем компактные аналитические представления средней скорости как функций параметров пространственной и временной асимметрии силовых полей, описывающих два основных типа броуновских моторов − с флуктуирующей периодической потенциальной энергией и флуктуирующей силой (pulsating and forced ratchets).

Симметрия дихотомных процессов

Хорошо известно, что отсутствие временной зависимости параметров рассматриваемой системы в каких-либо состояниях или на каких-либо интервалах времени является существенным фактом или допущением, упрощающим расчеты характеристик этой системы. Это упрощение возникает за счет того, что появляется возможность описания, стохастического или детерминистического, эволюции системы со временем или в терминах скоростей переходов между этими состояниями или путем привлечения решений уравнений с независящими от времени параметрами, сшивая их в моменты переходов между состояниями. Простейшая ситуация реализуется, когда таких состояний или интервалов всего два – дихотомная модель. Под дихотомным процессом обычно понимают такой, при котором имеется два состояния, мы будем обозначать их здесь символами “+” и “–”, в которых некоторая стохастическая функция времени $R(t)$ принимает значения R_+ или R_-, то есть $R(t)=R_\pm$. Константы скоростей переходов из состояния “+” в “–” и из состояния “–” в “+” обозначим через γ_+ и γ_-, соответственно. Введем далее параметр временной асимметрии $\varepsilon \equiv (\gamma_- - \gamma_+)/(\gamma_- + \gamma_+)$, равенство нулю которого будет означать временную симметрию дихотомного процесса. Обратные константы скоростей переходов задают средние времена жизни состояний $\tau_\pm = \gamma_\pm^{-1}$, которые равны друг другу при симметричном по времени процессе. Параметр временной асимметрии через средние времена жизни состояний выражается так:

$$\varepsilon = \frac{\tau_+ - \tau_-}{\tau_+ + \tau_-} . \tag{1}$$

Среднее значение функции $R(t)$ определяется очевидным соотношением

$$\langle R(t) \rangle = \frac{R_+\tau_+ + R_-\tau_-}{\tau_+ + \tau_-} = \frac{R_+ + R_-}{2} + \frac{R_+ - R_-}{2}\varepsilon , \tag{2}$$

инвариантным относительно преобразования $"+" \leftrightarrow "-"$, $\varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon$. Для многих приложений рассматривают такие значения $R(t)=R_\pm$, при которых среднее значение $R(t)$ равно нулю, $\langle R(t) \rangle = 0$. Тогда для $R(t)$ удобно использовать представление

$$R(t) = R[\sigma(t) - \varepsilon], \quad \sigma(t) = \pm 1, \quad \langle \sigma(t) \rangle = \varepsilon, \tag{3}$$

в котором стохастическая функция времени $\sigma(t)$ принимает значения ± 1, и ее среднее значение как раз и равно параметру асимметрии ε [R − постоянная, такая что $R_\pm = R(\pm 1 - \varepsilon)$].

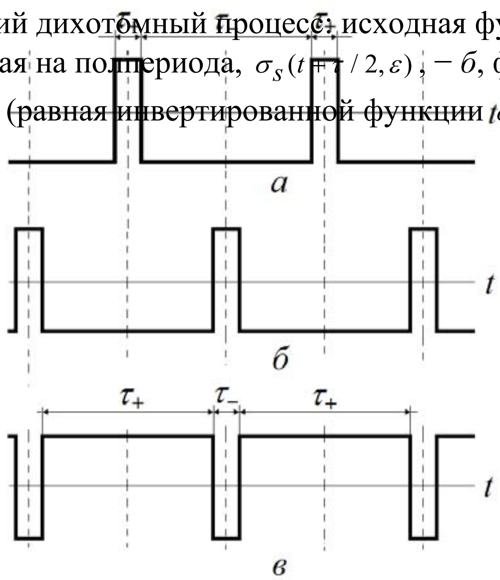
Немного менее распространена терминология, в которой детерминистический процесс, описываемый периодической (с периодом τ) функцией времени $R(t)$, принимающей два значения R_+ или R_- в течение промежутков времени τ_+ и τ_- (с $\tau_+ + \tau_- = \tau$), также называется дихотомным. Полезность этой терминологии состоит в том, что соотношения (1) - (3) также будут справедливыми и для детерминистического дихотомного процесса с тем отличием, что средние времена жизни состояний $\tau_\pm$ становятся при этом их реальными длительностями (ширинами ступенек ступенчатой функции $R(t)$ на рисунке). Тот факт, что в этом случае функции $R(t)$ или $\sigma(t)$ являются периодическими, позволяет использовать свойства симметрии периодических функций для их характеристики [10 - 12]. Немаловажным оказывается и то обстоятельство, что для расчетов характеристик рэтчет-систем можно использовать Фурье-компоненты этих функций, чтобы упростить исследование модели.

Рассмотрим ступенчатую функцию $\sigma(t)$, изображенную на рисунке. Легко видеть, что она относится к функциям *s*-симметричного типа, удовлетворяющим уравнению:

$$\sigma_s(t + t_s) = \sigma_s(-t + t_s), \tag{4}$$

где t_s задает положения осей симметрии временной шкалы, проходящих через середины длинных и коротких ступенек. Чтобы избежать терминологической путаницы особо подчеркнем, что следует различать асимметрию дихотомного процесса, характеризуемую параметром ε, и *s*-симметрию периодической функции, описывающей этот процесс (свойство (4)). Ступенчатая функция *s*-симметрична всегда (поскольку имеет упомянутые оси симметрии), тогда как дихотомный процесс симметричен только при $\varepsilon = 0$.

Рисунок. Преобразования симметрии ступенчатой функции $\sigma_S(t,\varepsilon)$, описывающей детерминистический дихотомный процесс: исходная функция − *а*, исходная функция, смещенная на полпериода, $\sigma_S(t+\tau/2,\varepsilon)$, − *б*, функция с обращенным знаком ε, $\sigma_S(t,-\varepsilon)$ (равная инвертированной функции $-\sigma_S(t+\tau/2,\varepsilon)$, см. (6)) − *в*.



Согласно свойствам симметрии периодических функций [10 - 12], в частном случае $\varepsilon = 0$ *s*-симметричная функция $\sigma_s(t)$ является одновременно *sh*- и *a*-симметричной функциями, которые определяются уравнениями:

$$\sigma_{sh}(t + \tau/2) = -\sigma_{sh}(t), \quad \sigma_a(t + t_a) = -\sigma_a(-t + t_a), \tag{5}$$

где t_a задает положения центров симметрии временной шкалы. Это означает, что при $\varepsilon = 0$ функция относится к универсальному тиру симметрии (является *u*-симметричной). Имея в виду, что параметр ε характеризует свойства симметрии самого процесса (дихотомного процесса), удобно далее явно указывать зависимость $\sigma(t)$ от ε, а также подчеркивать ее *s*-симметрию соответствующим индексом: $\sigma(t) = \sigma_s(t, \varepsilon)$. Определим несмещенную операцию обращения знака ε как замену $\tau_+ \leftrightarrow \tau_-$, производимую в функции $\sigma(t)$ таким образом, чтобы оси симметрии не смещались (сравни вкладки *а* и *в* на рисунке). Тогда непосредственной проверкой можно убедиться (см рисунок), что для таких функций имеет место следующее свойство симметрии:

$$\sigma_s(t + \tau/2, \varepsilon) = -\sigma_s(t, -\varepsilon), \tag{6}$$

переходящее, как уже отмечено выше, в *u*-симметрию при $\varepsilon = 0$ (*sh*-симметрийное поведение (6) при этом, т.е. $\sigma_s(t + \tau/2, 0) = -\sigma_s(t, 0)$, является частным случаем возникшей общей *u*-симметрии). Если начало координат выбрать совпадающим с положением оси симметрии $\sigma_s(t, \varepsilon)$, то Фурье-компоненты этой функции примут вид:

$$\sigma_0(\varepsilon) = \varepsilon, \quad \sigma_j(\varepsilon) \underset{j \neq 0}{=} \frac{2}{\pi j} \sin \frac{\pi j}{2} (1 + \varepsilon). \tag{7}$$

Свойство (6) в Фурье-компонентах записывается как $(-1)^j \sigma_j(\varepsilon) = -\sigma_j(-\varepsilon)$, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в него компонент (7). При $\varepsilon = 0$ равенство (7) ограничивает возможные значения j нечетными числами, как и должно быть для *sh*-симметричных функций.

Броуновские моторы, управляемые дихотомным процессом

Потенциальная энергия броуновского мотора в одномерной постановке задачи представляет собой функцию двух переменных $U(x, t)$, которая чаще всего записывается в аддитивно-мультипликативной форме

$$U(x, t) = u(x) + w(x)\chi(t). \tag{8}$$

Соответствующая этой потенциальной энергии сила

$$\begin{aligned} &F(x, t) = f(x) + g(x)\chi(t), \\ &f(x) = -du(x)/dx, \quad g(x) = -dw(x)/dx \end{aligned} \tag{9}$$

представляет собой сумму стационарного и флуктуационного вкладов, так что функционирование рэтчетов может эффективно анализироваться в рамках стандартных методов теоретической физики (например, с использованием функций Грина, описывающих диффузионную динамику в потенциальном профиле $u(x)$ [16, 17]).

Для броуновских моторов с флуктуирующей периодической потенциальной энергией функции $u(x)$ и $w(x)$ считаются периодическими с периодом L. Поэтому их производные − силы $f(x)$ и $g(x)$ − также периодические функции, средние значения которых по координате равны нулю, что следует из преобразований:

$$\langle f(x)\rangle \equiv \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx = -\frac{1}{L}\int_0^L \frac{du(x)}{dx}dx = u(L)-u(0)=0 \qquad (10)$$

(и аналогично для $g(x)$). Тот факт, что суммарная сила $F(x,t)$ обращается в ноль при усреднении по координате, позволяет считать среднее по времени значение функции $\chi(t)$ отличным от нуля. Это означает, что для дихотомного процесса в качестве $\chi(t)$ может быть выбрана рассмотренная в предыдущем разделе функция $\sigma(t)$.

Для броуновских моторов с флуктуирующей силой функция $u(x)$ также считается периодической, тогда как $w(x)$ − нет. Функция $w(x)$ линейно зависит от координаты x, так что ее производная принимает постоянное значение, отличное от нуля. Для того чтобы рассматриваемая система относилась к броуновским моторам и характеризовалась нулевым средним значением суммарной силы $F(x,t)$, нужно требовать обращения среднего по времени значения $\chi(t)$ в ноль. Для дихотомных процессов это означает выполнение равенства $\chi(t)=R(t)$, где функция $R(t)$ определена соотношением (3).

Предположим далее, что для броуновских моторов с флуктуирующей периодической потенциальной энергией в аддитивно-мультипликативной форме (8) имеет место равенство $u(x)=\lambda w(x)$, где $w(x)$ − пилообразный потенциал с ширинами звеньев l и $L-l$. Тогда его производная $g(x)=-dw(x)/dx$ описывается *s*-симметричной ступенчатой функцией, для которой можно ввести параметр теперь уже пространственной асимметрии $\kappa = 2l/L-1$ и обозначение $g_s(x,\kappa)$ в полной аналогии с описанием временной зависимости для вышеприведенного детерминистического дихотомного процесса. Для введенной так функции $g_s(x,\kappa)$ будет справедливо свойство, аналогичное (6):

$$g_s(x+L/2,\kappa) = -g_s(x,-\kappa). \qquad (11)$$

В силу пропорциональности функций $f(x)$ и $g(x)$, $f(x)=\lambda g(x)$, полная сила будет представлять собой мультипликативную форму вида

$$F(x,t;\lambda,\kappa,\varepsilon) = g_s(x,\kappa)\left[\lambda + \sigma_s(t,\varepsilon)\right]. \qquad (12)$$

Поскольку функция $g_s(x,\kappa)$ *s*-симметрична, то средняя скорость такого броуновского мотора является нечетным функционалом функции $F(x,t;\lambda,\kappa,\varepsilon)$; обозначим ниже данный факт индексом odd. Поочередно применяя свойства (11) и (6), получаем:

$$v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)\left[\lambda+\sigma_s(t,\varepsilon)\right]\right\}=v_{odd}\left\{-g_s(x,-\kappa)\left[\lambda+\sigma_s(t,\varepsilon)\right]\right\}$$
$$=v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)\left[\lambda-\sigma_s(t,-\varepsilon)\right]\right\}. \tag{13}$$

При $\varepsilon \neq 0$ рассматриваемый нечетный функционал является суммой двух вкладов, являющихся четным и нечетным функционалами по $\sigma_s(t,\varepsilon)$. Причем последний будет обращается в ноль при $\varepsilon = 0$. С другой стороны, легко убедиться, что из соотношений (13) следует обращение средней скорости в ноль при $\kappa = 0$, а в случае $\lambda = 0$ при $\varepsilon = 0$.

Проведем теперь аналогичные преобразования для броуновского мотора с флуктуирующей силой, характеризующейся функцией

$$F(x,t;\kappa,\varepsilon)=g_s(x,\kappa)+R_s(t,\varepsilon) \tag{14}$$

с нулевым средним значением флуктуаций $\left\langle R_s(t,\varepsilon)\right\rangle = 0$. Поскольку (согласно (3)) $R_s(t,\varepsilon)=R[\sigma_s(t,\varepsilon)-\varepsilon]$, то свойство (6) трансформируется в аналогичное свойство для $R_s(t,\varepsilon)$: $R_s(t-t_s+\tau/2,\varepsilon)=-R_s(t-t_s,-\varepsilon)$. Средняя скорость рэтчета является нечетным функционалом $F(x,t;\kappa,\varepsilon)$ в силу *s*-симметрии этой функции и по x, и по t. Поэтому эта скорость представима в виде суммы двух вкладов: первый − нечетный функционал по $g_s(x,\kappa)$ и четный по $R_s(t,\varepsilon)$, а второй, наоборот, − четный функционал по $g_s(x,\kappa)$ и нечетный по $R_s(t,\varepsilon)$. Тогда, поочередно используя свойства (11) и (6) для силы (14), получаем:

$$v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)+R_s(t,\varepsilon)\right\}=v_{odd}\left\{-g_s(x,-\kappa)+R_s(t,\varepsilon)\right\}$$
$$=v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)-R_s(t,-\varepsilon)\right\}. \tag{15}$$

Из этого соотношения следует, что при $\kappa = 0$ отличен от нуля только второй вклад (являющийся четным функционалом по $g_s(x,0)$ и нечетным по $R_s(t,\varepsilon)$), а при $\varepsilon = 0$ только первый (являющийся четным функционалом по $R_s(t,0)$ и нечетным по $g_s(x,\kappa)$). Поскольку из (15) следует, что $v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)+R_s(t,\varepsilon)\right\}=-v_{odd}\left\{g_s(x,-\kappa)+R_s(t,-\varepsilon)\right\}$, то обращение средней скорости в ноль происходит только при $\kappa=\varepsilon=0$.

Для выяснения характера зависимостей функционала $v\left\{F(x,t;\lambda,\kappa,\varepsilon)\right\}$ от параметров асимметрии, следующих из соотношений (13) и (15), разложим его по малым κ и ε:

$$v\left\{F(x,t;\lambda,\kappa,\varepsilon)\right\}=A(\lambda)+\kappa B_1(\lambda)+\varepsilon B_2(\lambda)+\kappa\varepsilon C(\lambda)+O\left(\kappa^2,\varepsilon^2\right), \tag{16}$$

где коэффициенты разложения $A(\lambda)$, $B_1(\lambda)$, $B_2(\lambda)$ и $C(\lambda)$ – функции параметров броуновского мотора, не зависящие от параметров асимметрии, а $O\left(\kappa^2,\varepsilon^2\right)$ обозначает члены порядка κ^2 и ε^2. Из (13) следует, что $v\left\{F(x,t;\lambda,0,\varepsilon)\right\}=0$, а значит $A(\lambda)=B_2(\lambda)=0$. Поскольку также имеет место равенство $v\left\{F(x,t;0,\kappa,0)\right\}=0$, то $B_1(0)=0$, а, значит, сам коэффициент $B_1(\lambda)$ представим в виде $B_1(\lambda)=\lambda\tilde{B}_1(\lambda)$. Поэтому для рэтчета с мультипликативной силой (12) имеем равенство

$$v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)\left[\lambda+\sigma_s(t,\varepsilon)\right]\right\}=\kappa\left[\lambda\,\tilde{B}_1(\lambda)+\varepsilon\,C(\lambda)\right]+O\left(\kappa^2,\varepsilon^2\right). \qquad (17)$$

Для броуновского мотора с флуктуирующей силой (14) величина $F(x,t;\lambda,\kappa,\varepsilon)$ и коэффициенты в (16) не зависят от λ, поэтому аргументы λ могут быть опущены. Используя свойство $v\{F(x,t;0,0)\}=0$, получаем равенство $A=0$, так что

$$v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)+R_s(t,\varepsilon)\right\}=\kappa B_1+\varepsilon\,B_2+O\left(\kappa^2,\varepsilon^2,\kappa\varepsilon\right). \qquad (18)$$

Основными результатами данной работы являются формулы (17) и (18), которые показывают, как наличие или отсутствие пространственной и временной асимметрии может влиять на среднюю скорость двух основных типов броуновских моторов с пилообразной зависимостью потенциала от координаты и дихотомной зависимостью потенциала от времени.

Обсуждение и выводы

Для броуновских моторов с флуктуирующей периодической потенциальной энергией рассмотренная зависимость (12) силы от координаты и времени соответствует флуктуациям потенциала по амплитуде. Формула (17) показывает, что рэтчет-эффект отсутствует в пространственно-симметричной системе ($\kappa=0$), а при наличии пространственной асимметрии ($\kappa\neq 0$) возможны точки остановки за счет изменения временной асимметрии, когда $\lambda\,\tilde{B}_1(\lambda)+\varepsilon\,C(\lambda)=0$. Можно сказать, что наличие таких точек остановки и возможность обращения направления движения возникает именно за счет конкуренции пространственной и временной асимметрии системы. Параметр λ характеризует степень пульсации рэтчета по амплитуде. Действительно, если ввести отношение амплитуд α потенциальной энергии в двух состояниях, $U_-(x)=\alpha U_+(x)$, $-1\le\alpha\le 1$, то параметр α связан с λ соотношением: $\alpha=(\lambda-1)/(\lambda+1)$. При $\lambda=0$ потенциальная энергия флуктуирует по знаку [$\alpha=-1,\ U_-(x)=-U_+(x)$] и из (17) следует, что $v_{odd}\left\{g_s(x,\kappa)\sigma_s(t,\varepsilon)\right\}\approx\kappa\,\varepsilon\,C(0)$. Это означает, что рэтчет-эффект отсутствует не только при $\kappa=0$, но и при $\varepsilon=0$. Этот факт был впервые установлен (с использованием концепции «термодинамического действия») Тарли и Астумяном (Tarlie and Astumian) [18] для мультипликативного рэтчета с флуктуирующей по знаку потенциальной энергией, который функционирует в режиме сверхзатухания. Та же закономерность была отмечена для адиабатических и высокотемпературных рэтчетов в [14, 19], а возникновение точек остановки при $\lambda<<1$ ($|1+\alpha|<<1$), $\varepsilon<<1$ – в работе [15].

Для броуновских моторов с флуктуирующей силой формула (18) показывает, что рэтчет-эффект отсутствует только при одновременном выполнении равенств $\kappa=0$ и $\varepsilon=0$, то есть эффект может иметь место (в отличие от броуновских моторов с флуктуирующей периодической потенциальной энергией) в пространственно симметричных системах исключительно за счет временной асимметрии. Обращение фактора $\kappa B_1+\varepsilon\,B_2$ в ноль (то есть появление точек остановки рэтчета) может происходить уже в первом порядке малости по параметру пространственной асимметрии κ. Для броуновских моторов с флуктуирующей периодической потенциальной энергией фактор $\lambda\,\tilde{B}_1(\lambda)+\varepsilon\,C(\lambda)$ не зависит от κ, так что появления точек остановки можно ожидать только во втором порядке малости по κ. Этим объясняется тот факт, что появление точек остановки у броуновских моторов с флуктуирующей силой является более типичным, чем при флуктуациях периодической потенциальной энергии.

В заключение отметим, что характер зависимости средней скорости от параметров пространственной и временной асимметрии для броуновских моторов обоих типов был установлен в работе [14] на основе решений, полученных в рамках высокотемпературного приближения для стохастических дихотомных флуктуаций (то есть для частного режима работы рэтчета). В данной работе результаты (17) и (18) получены без использования этих ограничений на основе анализа только общих свойств симметрии и справедливы при учете инерционной динамики.

Работа поддержана грантами БРФФИ (Ф18Р-022) и РФФИ (18-57-00003; 18-29-02012-мк).

Литература

1. *Урманцев Ю.А.* Симметрия природы и природа симметрии. – Москва: Мысль, 1974. – 229 с.
2. *Вейль Г.* Симметрия. – Москва: “Едиториал УРСС”. 2003. – 194 с.
3. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. – Москва: Иностранная литература, 1947. – 408 с.
4. *Хамермеш М.* Теория групп и ее применение к физическим проблемам. – Москва: «Мир», 1966. – 587 с
5. *Китайгородский А. И.* Органическая кристаллохимия. – Москва: Изд-во АН СССР, 1955. – 561 с.
6. *Вернадский В. И.* Биогеохимические очерки, 1922-1932 гг. - Москва; Ленинград: Изд-во АН СССР, 1940. – 250 с
7. *Reimann P.* Brownian Motors: Noisy Transport far from Equilibrium // Phys. Rep. –2002. – V. 361. – P. 57–265.
8. *Hänggi P., Marchesoni F.* Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale // Rev. Mod. Phys. – 2009. – V. 81, No 1. – P. 387–442.
9. *Cubero D., Renzoni F.* Brownian Ratchets: From Statistical Physics to Bio and Nanomotors. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2016. – 200 p.
10. *Шапочкина И. В., Корочкова Т. Е., Розенбаум В. М.* Свойства симметрии броуновских моторов с флуктуирующей периодической потенциальной энергией // Поверхность. – 2017. – Вып. 9(24). – С. 57–68.
11. *Розенбаум В. М., Шапочкина И. В., Теранишѝ Ё. и др.* Симметрия пульсирующих рэтчетов // Письма в ЖЭТФ. – 2018. – Т. 107. № 8. – С. 525-531.
12. *Rozenbaum V. M., Shapochkina I. V., Teranishi Y. et al.* Symmetry of deterministic ratchets // Phys. Rev. E. – 2019. -- V. 100, No. 2. – P. 022115-1-16.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика. Часть 1. – Издание 3-е, доп. – Москва: Наука, 1976. – 584 с.
14. *Розенбаум В. М.* Броуновские моторы в низкоэнергетическом приближении: классификация и свойства // ЖЭТФ. – 2010. – Т. 137, № 4. – С. 740-750.
15. *Rozenbaum V. M., Korochkova T. Ye., Chernova A. A. at al.* Brownian motor with competing spatial and temporal asymmetry of potential energy // Phys. Rev. E. – 2011. – V. 83, No 5. – P. 051120-1-10.
16. *Rozenbaum V. M., Shapochkina I. V., Lin S. H. at al.* Theory of slightly fluctuating ratchets // JETP Lett. – 2017. – 105, No 8. – P. 542-547.
17. *Розенбаум В. М., Шапочкина И. В., Трахтенберг Л.И.* Метод функций Грина в теории броуновских моторов // Успехи физ. наук. – 2019. – Т. 189, № 5. – С. 529-543.

18. *Tarlie M. B., Astumian R. D.* Optimal modulation of a Brownian ratchet and enhanced sensitivity to a weak external force // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. – 1998. – 95, No 3. – P. 2039-2043.
19. *Rozenbaum V. M., Makhnovskii Y. A., Shapochkina I. V. at al.* Adiabatically slow and adiabatically fast driven ratchets // Phys. Rev. E. – 2012. – 85, No. 4. – P. 041116-1-5.

References

1. Urmantsev Yu. A. *The symmetry of nature and the nature of symmetry* (Moscow:"Muisl, 1974). [in Russian]
2. Weyl H. *Symmetry* (Princeton Univ. Press, 1952).
3. Weyl H. *The Classical Groups: Their Invariants and Representations*. (Princeton Univ. Press, 1946)
4. Hamermesh M. *Group Theory and its Application to Physical Problems* (Pergamon Press, 1962)
5. Kitaigorodsky A. I. *Organic crystal chemistry* (Moscow: Izd. Akad. Nauk SSSR, 1955). [in Russian]
6. Vernadsky V. I. *Biogeochemical essays 1922-1932* (Moscow; Leningrad Izd-vo AN SSSR, 1940). [in Russian]
7. Reimann P. Brownian Motors: Noisy Transport far from Equilibrium. *Phys. Rep.* 2002. **361**: 57.
8. Hänggi P., Marchesoni F. Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale. *Rev. Mod. Phys.* 2009. **81**(1): 387.
9. Cubero D., Renzoni F. *Brownian Ratchets: From Statistical Physics to Bio and Nanomotors.* (Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2016).
10. Shapochkina I. V., Korochkova T. Ye., Rosenbaum V. M. Symmetry properties of Brownian motors with fluctuating periodic potential energy. *Poverkhnost`.* 2017. **9**(24): 57. [in Russian]
11. Rozenbaum V.M., Shapochkina I.V., Teranishi Y., Trakhtenberg L.I. Symmetry of pulsating ratchets. *JETP Lett.* 2018. **107**(8): 506. https://doi.org/10.1134/S0021364018080039
12. Rozenbaum V. M., Shapochkina I. V., Teranishi Y., Trakhtenberg L. I. Symmetry of deterministic ratchets. *Phys. Rev. E.* 2019. **100 (**2): 022115.
13. Landau L. D., Lifshitz E. M. *Statistical Physics, Cource of Theoretical Physics, Part 1, v. V.* (Pergamon Press, Oxford, 1980).
14. Rozenbaum V. M. Brownian motors in the low-energy approximation: Classification and properties. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 2010. **110**, (4): 653.
15. Rozenbaum V. M., Korochkova T. Ye., Chernova A. A., Dekhtyar M. L. Brownian motor with competing spatial and temporal asymmetry of potential energy. *Phys. Rev. E.* 2011. **83**(5): 051120.
16. Rozenbaum V. M., Shapochkina I. V., Lin S. H., Trakhtenberg L. I. Theory of slightly fluctuating ratchets. 2017. *JETP Lett.* **105**(8): 542.
17. Rozenbaum V. M., Shapochkina I. V., Trakhtenberg L. I. Green's function method in the theory of Brownian motors. *Phys. Usp.* 2019. **62**(5): 496. DOI: 10.3367/UFNe.2018.04.038347
18. Tarlie M. B., Astumian R. D. Optimal modulation of a Brownian ratchet and enhanced sensitivity to a weak external force. *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* 1998. **95**(3): 2039.
19. Rozenbaum V. M., Makhnovskii Y. A., Shapochkina I. V., Sheu S.-Y., Yang D.-Y., Lin S. H. Adiabatically slow and adiabatically fast driven ratchets. *Phys. Rev. E.* 2012. **85**(4): 041116.

ПРОСТОРОВО-ЧАСОВА СИМЕТРІЯ БРОУНІВСЬКИХ МОТОРІВ, КЕРОВАНИХ ДИХОТОМНИМ ПРОЦЕСОМ

Т. Є. Корочкова,[1] В. М. Розенбаум,[1] В.О. Машира,[2] О.В. Шакель,[3,4] І. В. Шапочкіна,[3] М. І. Ікім,[5] Г. М. Герасімов,[5] В. Ф. Громов, [5] О. С. Бугайов[5]

[1] *Інститут хімії поверхні ім. О.О. Чуйка Національної академії наук України, вул. Генерала Наумова, 17, Київ 03164, Україна, e-mail: taiscrust@mail.ru*
[2] *Інститут металофізики ім. Г. В. Курдюмова Національної академії наук України, вул. Вернадського, 36, м.Київ, Україна, 03164*
[3] *Білоруський державний університет, проспект Незалежності, 4, Мінськ 220050, Білорусь*
[4] *Республіканський інститут вищої школи, вул. Московська, 15, Мінськ 220007, Білорусь*
[5] *ФІЦ Інститут хімічної фізики ім. Н.Н. Сємьонова РАН, вул. Косигіна, 4, Москва 119991, Росія*

Дослідження симетрії різних систем дозволяє формулювати широкі висновки щодо їхніх властивостей без детальної інформації про конкретну систему. Моделі броунівських моторів (ретчетів) встановлюють зв'язок між просторово-часовою залежністю потенціальної енергії броунівських частинок і виникненням ретчет-ефекту. В даній статті ми використовуємо теорію симетрії ретчет-систем для дослідження механізмів впливу просторової і/або часової асиметрії наносистеми на середню швидкість броунівських моторів двох основних типів - з флуктуючою періодичної потенціальною енергією і флуктуючою силою (так званих пульсуючих і похилих ретчетів, pulsating and forced ratchets).

Розглядається надзагасаючий рух броунівської частинки в незміщеному силовому полі, яке є періодичною ступінчастою функцією координати, що зазнає дихотомні зміни з часом. Використання перетворень і властивостей симетрії броунівських моторів дозволило отримати компактні аналітичні представлення середньої швидкості пульсуючих і похилих ретчетів як функції параметрів просторової і часової асиметрії силових полів. Виявлено принципову відмінність залежностей середньої швидкості броунівських моторів цих двох типів від даних параметрів асиметрії. Для пульсуючих броунівських моторів направлений рух наночастинок відсутній в просторово-симетричній системі незалежно від наявності часової асиметрії; направлений рух в таких системах є можливим при наявності просторової асиметрії, а отримання точок зупинки мотора при цьому досягається шляхом підстроювання параметра часової асиметрії керуючого процесу. Для похилих броунівських моторів ретчет-ефект в просторово симетричних системах може виникати виключно за рахунок часової асиметрії. З цієї причини точки зупинки як результат конкуренції просторової і часової асиметрії легше реалізуються саме для моторів з флуктуючою силою (похилих).

Представлені в статті результати отримано на основі аналізу тільки загальних властивостей симетрії, без залучення прихованих симетрій ретчет-систем, тому вони будуть справедливими і для інерційної динаміки.

Ключові слова: *дифузний транспорт, броунівські мотори, ретчет ефект, симетрія ретчет-систем, дихотомний процес, телеграфний шум*

SPACE-TIME SYMMETRY OF BROWNIAN MOTORS CONTROLLED BY A DICHOTOMOUS PROCESS

T.Ye. Korochkova,[1] V.M.Rozenbaum,[1] V.A. Mashira,[2] E.V. Shakel,[3,4] I.V. Shapochkina[3], M.I. Ikim,[5] G.N. Gerasimov,[5] V.F. Gromov[5], A.S. Bugayov[5]

[1]*Chuiko Institute of Surface Chemistry, National Academy of Sciences of Ukraine, Generala Naumova str. 17, Kiev 03164, Ukraine*

[2]*G. V. Kurdyumov Institute for Metal Physics of the N.A.S. of Ukraine, Vernadsky str., 36, Kiev, Ukraine, 03164, e-mail: taiscrust@mail.ru*

[3]*Belarusian State University, Prospekt Nezavisimosti 4, Minsk 220050, Belarus*

[4]*Republican Institute of Higher Education, 15 Moskovskaya St., Minsk 220007, Belarus*

[5]*FIC Semenov Institute of Chemical Physics, Russian Academy of Sciences, Kosygin Street 4, Moscow 119991, Russia;*

Studying the symmetry of different systems allows one to formulate a variety of conclusions regarding their properties without knowing the detailed information about a particular system. The models of Brownian motors (ratchets) relate the spatial-temporal dependence of the potential energy of Brownian particles and the resulting ratchet effect. In this article, we use the symmetry description of ratchet systems to study the mechanisms of the influence of the spatial and (or) temporal asymmetry of a nanosystem on the average velocity of Brownian motors of the two main types - with fluctuating periodic potential energy and fluctuating force (the so-called pulsating and forced (or tilted) ratchets).

We consider the overdamped motion of a Brownian particle in an unbiased force field, which is described by a periodic stepwise coordinate function, that undergoes dichotomous changes with time. The use of symmetry transformations and symmetry properties of Brownian motors made it possible to obtain compact analytical representations of the average velocity of pulsating and forced ratchets as a function of the parameters of the spatial and temporal asymmetries of the force fields. The fundamental difference between the dependences of the average velocity of the Brownian motors of these two types on the asymmetry parameters is revealed. For the pulsating Brownian motors, the directed motion of nanoparticles is absent in a spatially symmetric system regardless of the presence of temporal asymmetry; the motion appears in the presence of spatial asymmetry, and it is possible to obtain the motor stopping points by tuning the temporal asymmetry parameter of the control process. For the forced Brownian motors, it is the temporal asymmetry that permits the ratchet effect in spatially symmetric systems. For this reason, stopping points as a result of competition of spatial and temporal asymmetries are easier to realize precisely for the motors with fluctuating forces (forced ratchets).

The results presented in this article were obtained by analyzing only general symmetry properties, without involving hidden symmetries of ratchet systems, therefore the results are also valid for inertial dynamics.

Keywords: *diffusion transport, Brownian motors, ratchet effect, symmetry of ratchet systems, dichotomous process, telegraph noise.*